Numération : quelques notions et exercices

Valentin Bahier

06/04/2019

L'objectif principal de ce mini-cours est de réussir à prouver le résultat suivant :

Théorème 1

Tout nombre rationnel admet un développement périodique en toute base entière de numération.

Des exercices sont proposés au fur et à mesure, dont la difficulté est graduée par des étoiles :

— $(\star)$: facile

— $(\star\star)$: moyen

— $(\star\star\star)$: difficile

1 Préliminaires : écriture positionnelle en base b

1.1 Définitions

Soit $b \in \mathbb{N}^*$ la base de numération.
Les **chiffres** en base b sont les symboles $0, 1, 2, \dots, b-1$. Tout nombre réel positif x peut s'écrire en base b comme une suite éventuellement infinie

$$x = c_k c_{k-1} c_{k-2} \dots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \dots$$

où les c_i sont des chiffres en base b tels que $x = \sum_{i \leq k} c_i b^i$.

On appelle **partie entière** de x la suite des chiffres d'indice positif ou nul

$$c_k c_{k-1} c_{k-2} \dots c_1 c_0$$

et **partie fractionnaire** de x la suite des chiffres d'indice négatif

$$0, c_{-1} c_{-2} \dots$$

Par convention d'écriture, le premier chiffre c_k doit être non nul (sauf si c'est c_0), et si les c_{-i} sont tous nuls à partir d'un certain rang on termine l'écriture par le dernier non nul. On dit dans ce cas que x a une partie fractionnaire **limitée** (**illimitée** dans le cas contraire).

Exemple 1

En base 10*, le nombre* 3,14159 *représente*

$$3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5}.$$

En base 7*, le nombre* 52,4 *représente*

$$5 \times 7^1 + 2 \times 7^0 + 4 \times 7^{-1}.$$

Afin de spécifier la base considérée lorsque celle-ci ne se déduit pas du contexte, on note

$$x = (c_k c_{k-1} c_{k-2} \dots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \dots)_b$$

l'écriture du nombre x en base b.

Exemple 2

$$(1202)_3 = (101111)_2$$

Pour convertir un nombre de la base b à la base b', on peut faire d'abord la conversion de la base b vers la base 10 (facile) puis faire la conversion du résultat obtenu vers la base b' (un peu moins facile).

1.2 Conversion vers la base 10

La méthode pour convertir x de la base b à la base 10 consiste juste à faire la somme des chiffres c_i multipliés par b^i.

Exemple 3

$$(1202)_3 = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = (47)_{10}$$
$$(BA{,}6)_{12} = 11 \times 12^1 + 10 \times 12^0 + 6 \times 12^{-1} = (142{,}5)_{10}$$

1.3 Conversion depuis la base 10

Pour convertir x depuis la base 10 vers la base b, on convertit séparément sa partie entière n et sa partie fractionnaire f.

1.3.1 Conversion de la partie entière n

Deux méthodes : la méthode par soustraction (construction de la gauche vers la droite), et la méthode par division (construction de la droite vers la gauche).

Méthode par soustraction

On cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que $b^k \leq n < b^{k+1}$. S'il n'existe aucun tel k cela signifie que n est nul. Sinon, n en base b s'écrit avec $k+1$ chiffres $(c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)_b$.

c_k est le nombre de fois que b^k est dans n.

c_{k-1} est le nombre de fois que b^{k-1} est dans $n - c_k b^k$.

$\vdots$

c_1 est le nombre de fois que b est dans $n - c_k b^k - c_{k-1} b^{k-1} - \dots - c_2 b^2$.

$c_0 = n - c_k b^k - c_{k-1} b^{k-1} - \dots - c_2 b^2 - c_1 b$.

Méthode par division

1. On fait la division euclidienne de n par b : $n = bq + r$. Alors r est le premier chiffre en base b de n en commençant la lecture par la droite.
2. On recommence avec q au lieu de n, et on place le nouveau reste à gauche du précédent.
3. On répète l'étape 2 jusqu'à obtenir un quotient nul. Le dernier quotient non nul (celui-ci est strictement inférieur à b donc correspond au dernier reste non nul dans la suite des divisions) est en première position (tout à gauche de l'écriture de n en base b).

1.3.2 Conversion de la partie fractionnaire f

Comme on l'a dit précédemment, la partie fractionnaire peut être limitée ou illimitée. Il n'est pas rare qu'une partie fractionnaire limitée dans une certaine base se transforme en une partie fractionnaire illimitée dans une autre.

Exemple 4

$$(20{,}1)_3 = (6{,}33333\dots)_{10}$$

Il est alors possible que l'algorithme suivant ne termine pas et il convient d'ajouter une condition d'arrêt sur le nombre de chiffres après la virgule que l'on désire obtenir.

Méthode

1. On multiplie f par b : $g = f \times b$. La partie entière de g est le premier chiffre après la virgule de l'écriture de f en base b.
2. On recommence avec la partie fractionnaire de g au lieu de f. La nouvelle partie entière est le chiffre d'après dans l'écriture de f en base b.

3. On répète l'étape 2 jusqu'à obtenir une partie fractionnaire nulle.

Exercice 1 ($\star$)

Convertir $(33,12)_4$ *en base 16. Et en base 12 ? Et en base 15 ?*

1.4 Opérations élémentaires

1.4.1 Addition en base b

La méthode d'addition avec retenues utilisée dans la base 10 se généralise très facilement à n'importe quelle base b. Il suffit de connaître les tables d'addition.

Exemple 5 (*Tables d'addition en base 2, 3 et 4*)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	10

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

1.4.2 Multiplication en base b

De même que pour l'addition, la méthode de multiplication classique se généralise à n'importe quelle base b. Il suffit de connaître les tables de multiplication (en plus des tables d'addition).

Exemple 6 (*Tables de multiplication en base 2, 3 et 4*)

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

1.4.3 Soustraction en base b

La méthode classique de soustraction se généralise elle aussi très bien à n'importe quelle base b. Une autre technique est la suivante : en appelant x et y les deux nombres tels que $x \geq y$, et en notant k le nombre de chiffres de la partie entière de y écrite en base b, alors pour faire l'opération $x - y$ on procède en deux temps :

- On additionne x avec le **complémentaire** de y en base b, c'est-à-dire avec le nombre z tel que $y + z = 1\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ zéros}}$.
- On retranche $1\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ zéros}}$ au résultat.

Exercice 2 ($\star$)

Effectuer l'addition, la multiplication, et la soustraction de $(31)_4$ *par* $(23)_4$.

Exercice 3 ($\star\star$)

Effectuer l'addition, la multiplication, et la soustraction de $(43{,}2)_6$ *par* $(51{,}5)_6$.

Exercice 4 ($\star\star$)

Deviner une méthode générale de division en base b (sans passer par la base 10*), puis effectuer la division de* $(1030221)_4$ *par* $(12)_4$.

2 Développement décimal périodique

Dans cette section nous considérons seulement la base $b = 10$.

2.1 Période

On appelle **période** tout bloc d'une partie fractionnaire qui se répète à l'infini de façon consécutive.

Exemple 7

09, 90 *et* 9090 *sont des périodes du nombre* $\frac{1}{110}$. *En effet,*

$$\frac{1}{110} = 0{,}0090909090909\ldots$$

Lorsque le développement décimal (c'est-à-dire l'écriture en base 10) d'un nombre donné admet une période, on dit qu'il est **périodique**.

Afin de clarifier la signification des points de suspension lorsque le développement est périodique, on retire ces points de suspension et on ajoute un trait sous les chiffres d'une période.

Exemple 8

$$\frac{1}{110} = 0{,}\underline{09} = 0{,}0\underline{90} = 0{,}00\underline{9090} \quad ; \qquad \frac{7}{3} = 2{,}\underline{3} = 2{,}\underline{3333}$$

On appelle **la période** d'un développement périodique le premier bloc se répétant et de longueur minimale.

Exemple 9

La période de $\frac{1}{110}$ est 09. Celle de $\frac{7}{3}$ est 3.

Exercice 5 (★★)

Montrer que pour tout entier $\ell \geq 1$, et tous chiffres $a_1, \ldots, a_\ell$,

$$0{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_\ell}{\underbrace{99\ldots 9}_{\ell \text{ chiffres}}}$$

2.2 Nombres rationnels

On dit que x est un nombre **rationnel** lorsqu'on peut l'écrire comme une fraction, c'est-à-dire comme le ratio de deux entiers m et n, où $n \geq 1$. La fraction $\frac{m}{n}$ est dite **irréductible** si m et n n'ont pas de facteur premier commun.

(Rappel : Un **nombre premier** est un entier naturel admettant exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs.)

Exercice 6 (★)

À l'aide du résultat de l'exercice 5, mettre sous forme de fraction irréductible les nombres suivants : $0{,}\underline{78}$, $1{,}\underline{740}$, *et* $0{,}\underline{0099}$.

Théorème 2

Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique.

Démonstration : Soit $x = \frac{m}{n}$ une fraction irréductible. Sans perte de généralité, on peut supposer que n est premier avec 10 (c'est-à-dire sans facteur premier commun avec 10) et strictement supérieur à 1.

En effet,

- si n contient des puissances de 2 ou 5, c'est-à-dire $n = 2^j 5^k \widetilde{n}$ où j et k sont des entiers naturels et où $\widetilde{n}$ premier avec 10, alors en multipliant numérateur et dénominateur par $2^k 5^j$ on obtient $x = \frac{1}{10^{j+k}} \frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ où $\widetilde{m} = 2^k 5^j m$ est premier avec $\widetilde{n}$. De plus, il est clair que le développement décimal de $\frac{1}{10^{j+k}} \frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ est le même que celui de $\frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ à un décalage près de la virgule de $j+k$ emplacements.

- si $n = 1$, c'est immédiat puisqu'alors on peut écrire x avec une partie fractionnaire nulle (développement décimal périodique de période 0).

On commence par effectuer la division euclidienne de m par n : $m = nq + r_0$. Le quotient q trouvé est la partie entière de x (composée d'un ou plusieurs chiffres). On fait ensuite successivement les divisions de $10r_i$ par n, donnant pour quotient q_{i+1} et pour reste r_{i+1} (chacun des deux ayant un seul chiffre).
Par construction, pour tout i, la partie entière de $10^i x$ s'écrit alors $qq_1q_2 \dots q_i$, et les r_i sont précisément les restes de la division de $10^i m$ par n. De plus, la suite des divisions se poursuit indéfiniment (c'est-à-dire tous les r_i sont non nuls) car sinon il existerait un entier j tel que n divise $10^j m$, ce qui est impossible (n est différent de 1 et premier avec 10 et m). Ceci traduit le fait que x n'est pas un **nombre décimal** (nous y reviendrons au paragraphe suivant). Le développement décimal de x est donc

$$q{,}q_1q_2q_3\cdots$$

À chaque étape i, il n'y a que $n-1$ restes possibles (puisqu'on vient de voir que $r_i \geq 1$, et bien sûr $r_i \leq n-1$), si bien qu'on ne peut pas opérer n étapes sans rencontrer deux restes identiques. Pour tous i et j tels que $i < j$, on a l'égalité $r_i = r_j$ si et seulement si $10^i m$ et $10^j m$ ont même reste dans la division par n, c'est-à-dire si l'entier $10^i m(10^{j-i} - 1)$ est un multiple de n, ou encore, puisque n est premier avec 10 et m, si n divise $10^{j-i} - 1$. Ceci ne dépendant que de l'écart entre j et i, alors la suite $(r_i)_{i \geq 0}$ est périodique, avec une période de longueur $L < n$. Il s'ensuit que la suite des quotients $(q_i)_{i \geq 1}$ est périodique, et la longueur de sa période divise L. ■

Un **nombre décimal** est un nombre rationnel tel qu'en le mettant sous forme de fraction irréductible, le dénominateur est de la forme $2^j 5^k$ pour certains entiers naturels j et k.

Exercice 7 (⋆ ⋆ ⋆)

Montrer que tout nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal ne peut pas avoir pour période 9.

2.3 Longueur de la période

Avant d'énoncer le prochain résultat il nous faut rappeler quelques notions d'arithmétique :
Soient j, k deux entiers, et n un entier strictement positif.
On dit que j et k sont **premiers entre eux** si leur plus grand commun diviseur est 1, ce qui se note

$$j \wedge k = 1.$$

On dit que j est **congru** à k **modulo** n si $j-k$ est un multiple de n, c'est-à-dire si n divise $j-k$. On note dans ce cas

$$j \equiv k \mod n.$$

Si $j \neq 0$, on appelle **ordre multiplicatif** de j modulo n le plus petit entier $\ell \geq 1$ tel que $j^\ell \equiv 1 \mod n$.

Proposition 1

Soit $x = \frac{m}{n}$ une fraction irréductible. Notons ℓ la longueur de la période de x.

- *Si $n \wedge 10 = 1$, alors ℓ est l'ordre multiplicatif de 10 modulo n.*
- *Plus généralement, si on décompose $n = n_1 n_2$ où $n_1 \wedge 10 = 1$ et n_2 est un produit de puissance de 2 et de 5, alors ℓ est l'ordre multiplicatif de 10 modulo n_1.*

Démonstration : Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du Théorème 2, on remarque tout d'abord que le deuxième point découle facilement du premier. Montrons le premier point. Considérons donc $x = \frac{m}{n}$ une fraction irréductible où n est premier avec 10 et différent de 1. Nous avions vu :

- Il existe un plus petit entier $L > 0$ tel que $10^L - 1$ est divisible par n, et cet entier L est la longueur de la période de la suite des restes $(r_i)_{i \geq 0}$.
- La longueur ℓ de la période de x correspond à celle de la période des quotients $(q_i)_{i \geq 1}$ et donc divise L.

Il ne reste plus qu'à montrer que L divise ℓ (et alors on aura $\ell = L$).
En utilisant le résultat de l'exercice 5, il vient

$$\frac{r_0}{n} = 0,\underline{q_1 q_2 \dots q_\ell} = \frac{q_1 q_2 \dots q_\ell}{10^\ell - 1}$$

si bien que n divise $(10^\ell - 1) r_0$. Puisque n est premier avec m donc avec r_0, alors n divise $10^\ell - 1$, ce qui implique que ℓ est un multiple de L. ■

Exercice 8 ($\star\star$)

Trouver la longueur de la période de $\frac{90}{7}$ sans calculer explicitement la période. Même question avec $\frac{3}{65}$, puis $\frac{5}{51}$.

2.4 Caractérisation des longueurs maximales

Une fonction très connue en théorie des nombres s'appelle l'**indicatrice d'Euler**. Cette fonction, notée habituellement φ, associe à tout entier naturel n non nul le nombre d'entiers entre 1 et n étant premiers avec n. Formellement,

$$\varphi : n \mapsto \operatorname{card}(\{m \in [\![1, n]\!] : \ m \wedge n = 1\}).$$

Exemple 10

- $\varphi(12) = 4$, *car parmi les entiers de* 1 *à* 12, *seuls* $1, 5, 7$ *et* 11 *sont premiers avec* 12.
- *Pour tout nombre premier* p, $\varphi(p) = p - 1$.
- *Pour tout nombre premier* p *et tout entier* $k \geq 1$, $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$.

L'indicatrice d'Euler est une **fonction multiplicative**. Autrement dit, elle vérifie la propriété suivante : pour tous entiers strictement positifs a, b premiers entre eux,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

En particulier, en décomposant n en facteurs premiers, c'est-à-dire $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$ où les p_i sont des nombres premiers et les k_i des entiers strictement positifs, on a

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1)p_i^{k_i - 1} = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Proposition 2 (*admis*)

Soit $x = \frac{m}{n}$ *une fraction irréductible. Notons* ℓ *la longueur de la période de* x. *Alors* ℓ *divise* $\varphi(n)$.

Conséquence : pour n'importe quelle fraction irréductible $\frac{m}{n}$, une condition nécessaire pour que la longueur ℓ de sa période soit de longueur $n-1$ (on dit que ℓ est **maximale**) est que $\varphi(n) = n - 1$, c'est-à-dire que n doit être un nombre premier.

On dit que 10 est une **racine primitive** de 1 modulo n si l'ordre multiplicatif de 10 est $n - 1$.

Proposition 3 (*admis*)

Soit $x = \frac{m}{n}$ *une fraction irréductible. Alors la période de* x *est de longueur maximale (valant* $n-1$*) si et seulement si* 10 *est une racine primitive de* 1 *modulo* n.

Exercice 10 ($\star\star$)

Dresser la liste de tous les entiers n *entre* 2 *et* 31 *tels que la période de* $\frac{1}{n}$ *est de longueur maximale.*

2.5 Unicité du développement

On dit qu'un développement décimal est **propre** s'il n'admet pas une période valant 9.

Proposition 4 (*admis*)

Tout nombre réel correspond à un unique développement décimal propre.

Parmi les nombres réels, seuls les nombres décimaux admettent plusieurs développements décimaux : un propre, et un impropre (de période 9).

Exercice 11 (*Défi*)

Démontrer le Théorème 1.

3 Quelques mystères non résolus sur π

3.1 Nombres univers

Un nombre **univers** est un nombre réel dans lequel on peut trouver n'importe quelle succession de chiffres de longueur finie, pour une base donnée.

On ne sait pas si π est un nombre univers (ni beaucoup d'autres nombres irrationnels).

3.2 Nombres normaux

Notons $A = \{0, \ldots, b-1\}$ l'ensemble des chiffres en base b. Pour toute suite finie s d'éléments de A, on définit $N(s,n)$ le nombre d'apparitions de s parmi les n premiers chiffres du développement propre de x. On dit qu'un nombre réel x est

- **simplement normal en base** b si pour tout $a \in A$,
$$\frac{N(a,n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}.$$
- **normal en base** b si pour tout $k \geq 1$ et toute suite s de k éléments de A,
$$\frac{N(s,n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b^k}.$$
- **normal** s'il est normal en toute base.

On ne sait pas si π est un nombre normal. On ne sait même pas s'il existe une base dans laquelle il est simplement normal. Les calculs récents par ordinateurs des premiers milliards de décimales de π montrent que les fréquences d'apparition des chiffres de 0 à 9 avoisinent chacune 10%, ce qui va dans le sens de la conjecture comme quoi π serait simplement normal en base 10.

Exercice 12 ($\star\star$)

1) *Exhiber un nombre irrationnel qui n'est pas un nombre univers.*
2) *Exhiber un nombre univers qui n'est pas un nombre normal.*

Exercice 13 ($\star\star\star$)

Construire un nombre simplement normal en base 10*, qui n'est pas rationnel.*

Exercice 14 ($\star\star\star\star$)

Construire un nombre normal en base 2*.*

Références

(1) Cours de Mathématiques Discrètes, Chap 4, de L. Donati et N. Stolfi `http://jalon.unice.fr/Members/donati/Fichiers/numerationdiapo.pdf`

(2) Cours de Numération de P. Ézéquel `https://perso.univ-st-etienne.fr/ezequel/Numeration/`

(3) Cours de Numération et Logique de G. Koepfler `http://helios.mi.parisdescartes.fr/~gk/NumLog/notes.html`

(4) `https://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_décimal_périodique`

(5) `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_univers`

(6) `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_normal`

(7) Digit Statistics of the First 22.4 Trillion Decimal Digits of Pi, Peter Trueb, 2016

Exercice 15 (*Bonus*)

En quelle base sont numérotés les exercices ?