GdT Quantique
Bloc Homologie de Factorisation

Benjamin Haïoun

17 Novembre 2023

L'homologie de factorisation [AF19] permet d'intégrer une structure algèbrique paramétrisée par les n-disques sur une n-variété. Dans le cas qui nous intéresse, $n = 2$, les structures algébriques correspondent à des catégories enrubannées, et l'homologie de factorisation va construire les catégories skein.

1 E_2-algèbres

La notion d'E_2-algèbre peut être construite à l'aide d'une opérade [SW03]. Informellement c'est un objet A (d'une certaine catégorie monoidale symétrique $\mathcal{C}$) muni d'une famille de produits $A \otimes A \to A$ pour chaque plongement $D^2 \sqcup D^2 \hookrightarrow D^2$. En fait on a un produit d'arité k: $A^{\otimes k} \to A$ pour chaque plongement $(D^2)^{\sqcup k} \hookrightarrow D^2$ compatibles avec la composition, et des "relations" entre ces produits pour des isotopies entre plongements. Cette structure peut être encodée sans faire appel à la théorie des opérades:

Definition 1.1. *Une E_2-algèbre dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$ est un 2-foncteur monoidal symmétrique*

$$\mathcal{A} : Disk_2^{or} \to \mathcal{C}$$

où $Disk_2^{or}$ est la 2-catégories des unions disjointes de disques orientés, plongements orientés et isotopies (elles-même considérées modulo isotopie).

Theorem 1.2 ([Fre17], voir aussi [Tur94])**.** *Pour $\mathcal{C} = Cat$, une E_2-algèbre correspond à une catégorie tréssée balancée (munie d'un twist).*

Preuve: Dans un sens on retrouve la structure monoidale, tréssée et balancée à partir de plongements et d'isotopies bien choisies, voir dessins en exposé. Dans l'autre sens (pour les catégories enrubannées) on retrouve une E_2-algèbre à l'aide du calcul graphique de Reshetikhin–Turaev.

2 Homologie de Factorisation

L'homologie de factorisation prends en entrée une E_n-algèbre $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ et une n-variété M et donne en sortie un objet $\int_M \mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$. Ces objets s'arrangent en un foncteur monoidal symmétrique

$$\int_{-} \mathcal{A} : Mfld_n^{or} \to \mathcal{C}$$

où $Mfld_n^{or}$ est la catégorie des n-variétées orientées, plongements et isotopies. Ce foncteur peut être défini comme l'extension de Kan à gauche du foncteur $\mathcal{A} : Disk_n^{or} \to \mathcal{C}$ le long de l'inclusion $\iota : Disk_n^{or} \to Mfld_n^{or}$. Ici, nous allons donner une description (un peu) plus explicite comme une colimite. L'idée sous-jacente est que toute n-variété est obtenue comme des recollements de disques, et qu'on sait déjà quoi faire sur les disques: $\mathcal{A}$.

Definition 2.1. *([AF19]) Soit $\mathcal{A}$ une E_2-algèbre dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$ et Σ une surface orientée. On considère la 2-catégorie "slice" $Disk_2^{or}/_\Sigma$ des plongements d'un disque vers Σ, triangles commutatifs et isotopies. On veut reconstruire Σ uniquement à partir des informations sur les disques dans cette catégories. On a un foncteur oubli $U : Disk_2^{or}/_\Sigma \to Disk_2^{or}$ qui oublie le plongement vers Σ.*
L'homologie de factorisation de Σ à coefficients $\mathcal{A}$ est l'objet:

$$\int_\Sigma \mathcal{A} := colim(Disk_2^{or}/_\Sigma \xrightarrow{U} Disk_2^{or} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{C})$$

Cette definition abstraite permet d'obtenir immédiatement des propriétés très agréables:

Theorem 2.2 ([AF19])**.** *L'homologie de factorisation respecte, et est caractérisée par, des propriétés d'excision pour le découpage d'une surface selon des sous-variétés de codimension 1.*

Theorem 2.3 ([Sch14])**.** *L'homologie de factorisation définie une TQFT pleinement étendue*

$$\int_{-\times\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{A} : Bord_n^{or} \to Alg_n(\mathcal{C})$$

à valeur dans une certain catégorie Morita.

Dans le cas $\mathcal{C} = Cat$ et $\mathcal{V} := \mathcal{A}(D^2)$ est une catégories enrubannée, le calcul graphique de Reshetikhin–Turaev permet de bien représenter le comportement de $\mathcal{V}$ sur les plongements et isotopies de disques. L'homologie de factorisation devrait étendre naturellement ce calcul graphique à des surfaces. On peut deviner le résultat:

Definition 2.4 ([Wal06],[Joh21])**.** *La catégories skein $SkCat_\mathcal{V}(\Sigma)$ d'une surface Σ à coefficients $\mathcal{V}$ a pour objets les familles finies P de points orientés framés de Σ coloriés par des objets de $\mathcal{V}$. Elle a pour morphismes $P \to Q$ l'espace vectoriel engendré par les classes d'isotopie de graphes enrubannés coloriés comme dans le calcul graphique de Reshetikhin–Turaev, mais plongés dans $\Sigma \times [0,1]$ au lieu de $D^2 \times [0,1]$, modulo les relations locales usuelles.*

Theorem 2.5 ([Coo19] par excision)**.** *On a une équivalence de 2-foncteurs*

$$SkCat_\mathcal{V}(-) \simeq \int_- \mathcal{V}\ .$$

3 Action du Mapping Class Group

On a déjà une représentation "catégorique" du Mapping Class Group d'une surface Σ. En effet un difféomorphisme f de Σ induit un foncteur $f_* : SkCat_\mathcal{V}(\Sigma) \to SkCat_\mathcal{V}(\Sigma)$, et une isotopie entre deux difféomorphismes induit un isomorphisme naturel entre les foncteurs.
On peut en extraire une représentation linéaire: il y a un objet, le vide, qui est préservé par tous les difféomorphimes. Le groupe $MCG(\Sigma)$ agit sur l'espace vectoriel $End_{SkCat(\Sigma)}(\emptyset)$, qui coincide avec l'algèbre skein munie de l'action évidente. Seulement, l'algèbre skein ne contient qu'une partie de l'information de la catégories skein, on l'on peut faire mieux.

Si Σ est une surface connexe compacte avec une composante de bord choisie, on peut "rétracter" Σ loin de son bord et insérer un disque près du bord, voir Figure 1. Ce procédé défini un plongement $D^2 \sqcup \Sigma \to \Sigma$ et en y regardant de plus près une action de l'objet algèbre D^2 sur Σ dans $Mfld_2^{or}$. En applicant l'homologie de factorisation à cette structure, on remarque que $SkCat_\mathcal{V}(\Sigma)$ est une catégorie module sur $\mathcal{V}$. Dans ce contexte on peut définir une algèbre d'endomorphisme interne $A_\Sigma \in \mathcal{V}$ [BBJ18, EGNO15]. Elle vérifie une propriété universelle

$$Hom_\mathcal{V}(V, A_\Sigma) \simeq Hom_{SkCat_\mathcal{V}(\Sigma)}(V \triangleright \emptyset, \emptyset)$$

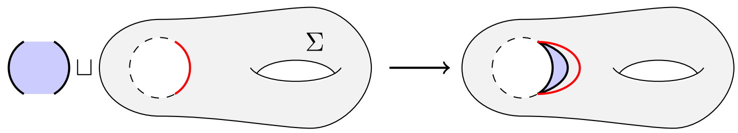

Figure 1: L'action du disque

Theorem 3.1 ([BBJ18])**.** *Quitte à travailler dans une completion $\hat{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$, l'algèbre A_Σ existe et représente la catégorie skein:*

$$\widehat{SkCat}_{\mathcal{V}}(\Sigma) \simeq A_\Sigma - mod_{\hat{\mathcal{V}}}$$

Maintenant, le Mapping Class Groupe relatif au bord $MCG(\Sigma, \partial\Sigma)$, qui préserve l'action du disque, agit sur A_Σ.

Theorem 3.2 ([Haï22])**.** *Pour $\mathcal{V} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) - mod^{fin}$, on a un isomorphisme de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-algèbres $A_\Sigma \simeq \mathcal{S}(\Sigma)$ avec l'algèbre stated skein de [Lê18].*

L'action induite de $MCG(\Sigma, \partial\Sigma)$ sur l'algèbre stated skein est l'action évidente.

References

[AF19] David Ayala and John Francis. A factorization homology primer. 2019. arXiv:1903.10961.

[BBJ18] David Ben-Zvi, Adrien Brochier, and David Jordan. Integrating quantum groups over surfaces. *Journal of Topology*, 11(4):874–917, 2018. arXiv:1501.04652v5.

[Coo19] Juliet Cooke. Excision of Skein Categories and Factorisation Homology. *arxiv*, 2019. arXiv:1910.02630.

[EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Fre17] Benoit Fresse. *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1*, volume 217 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. The algebraic theory and its topological background.

[Haï22] Benjamin Haïoun. Relating stated skein algebras and internal skein algebras. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 18:Paper No. 042, 39, 2022.

[Joh21] Theo Johnson-Freyd. Heisenberg-picture quantum field theory. In *Representation theory, mathematical physics, and integrable systems*, volume 340 of *Progr. Math.*, pages 371–409. Birkhäuser/Springer, Cham, [2021] ©2021. arXiv:1508.05908.

[Lê18] Thang T. Q. Lê. Triangular decomposition of skein algebras. *Quantum Topol.*, 9(3):591–632, 2018.

[Sch14] Claudia Scheimbauer. *Factorization Homology as a Fully Extended Topological Field Theory*. PhD thesis, ETH ZÜRICH, 2014. http://www.scheimbauer.at/ScheimbauerThesis.pdf.

[SW03] Paolo Salvatore and Nathalie Wahl. Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras. *Q. J. Math.*, 54(2):213–231, 2003. arXiv:math/0106242.

[Tur94] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[Wal06] Kevin Walker. Topological Quantum Field Theories [early incomplete draft]. http://canyon23.net/math/tc.pdf, 2006.