Une illustration du théorème de Brouwer

Benjamin Haïoun

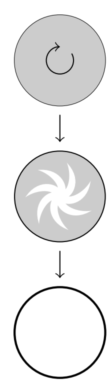
7 mai 2020

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat foncièrement intuitif, notamment en dimension 2 comme nous allons le voir, mais dont la preuve nécessite généralement une bonne partie de la machinerie de la topologie algébrique. Nous allons, sans toujours le formaliser, nous approcher de notions comme l'homotopie, le revêtement universel et ses propriétés de relèvement, le groupe fondamental et même les cofibrations. C'est un très bel horizon que nous offre la preuve de ce théorème, en dimension 2.

Théorème 1 (Point fixe de Brouwer): *Soit* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ *le disque unité fermé de dimension 2. Toute application continue* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *admet un point fixe.*

Le folklore (Wikipedia émet quelques doutes) nous dit que Brouwer a compris ce résultat en observant une tasse de café. Lorsqu'il mélangeait son sucre dans la tasse, il remarquait que malgré les tourbillons, il y avait toujours un grain de sucre parfaitement immobile ! En général au centre du tourbillon, mais pas forcément. Je vous propose d'observer une tasse de café de manière totalement différente, sans sucre - je n'en mets pas - pour comprendre une autre forme du théorème de Brouwer.

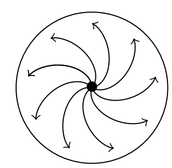
Quand vous servez le café, il y a, en général, une fine couche de mousse, de bulles, sur toute la surface de la tasse. Vous pouvez touiller légèrement, elle reste là. Si vous attendez un peu, la mousse se dissipe et à la fin il n'y en a plus que sur le bord de la tasse. On part d'un système très régulier : de la mousse sur toute la surface, et on arrive à un système régulier aussi : de la mousse sur tout le bord. Cependant, si vous avez un peu touillé et que le café tourne, vous observerez, entre les deux, un état chaotique où la mousse forme toutes sortes de motifs sans régularité apparente. On perd notamment la symétrie circulaire qui est pourtant préservée même par le mouvement du café. Bizarre... il n'y a aucune façon régulière d'aller d'une répartition homogène sur la surface, à une répartition homogène sur le bord. À chaque fois, une singularité apparaît.



Pour modéliser mathématiquement cette situation, on peut observer la trajectoire de chaque petite bulle de la mousse, et suivre son évolution au cours du temps, jusqu'à ce que toute la mousse ait rejoint le bord. La surface de la tasse est un disque unité fermé $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$, et son bord est le cercle S^1. On a donc, pour chaque point x de $\mathbb{D}$, une trajectoire associée, c'est à dire une application $t \mapsto x(t)$, pour t entre 0 et 1 minute par exemple, donc sur l'intervalle $I = [0, 1]$. La trajectoire $x(t)$ doit bien-sûr être continue, et telle que $x(0) = x$ est le point initial, et $x(1) \in S^1$ est sur le bord. De plus, si $x \in S^1$ est un point du bord, on suppose qu'il reste au bord tout au long de sa trajectoire, ne faisant que tourner avec le café.

Pour simuler une situation non chaotique, sans apparition de singularité, on voudrait que deux bulles qui se touchent au départ se touchent tout du long, pour garantir un mouvement d'ensemble. Cela revient à dire que les trajectoires $x(t)$ dépendent continument de x, ou plus formellement que l'application $f : \mathbb{D} \times I \to \mathbb{D}$, $(x, t) \mapsto x(t)$ est continue. On note f_t l'application continue $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $x \mapsto x(t)$, qui correspond à l'état au temps t. On remarque que l'état initial est $f_0 = Id_{\mathbb{D}}$ et que l'état final f_1 est à valeur dans S^1. La dynamique sur le bord est donnée par la restriction $g = f|_{S^1 \times I}$, qui est aussi à valeur dans S^1. Dans cette situation, on dit que f est une rétraction homotopique faible de $\mathbb{D}$ sur son bord S^1. La continuité de f traduit le fait qu'il ne peut **pas y avoir de formations de "trous" au centre** et le fait que g soit à valeur dans S^1 traduit le fait que la mousse de café **ne peut pas se décoller du bord** au cours de la transformation.

Intuitivement, on peut commencer à sentir que ça va coincer. On veut continument pousser tout le disque dans son bord, mais on ne peut pas "décoller" une partie du bord pour l'envoyer sur le bord d'en face. Assez vite, on se rend compte que sur une petite bande autour du bord, on est obligé de suivre le mouvement du bord , mais on ne sait pas où envoyer le milieu ! Il ne peut pas faire tout le tour du bord, lui. En fait, c'est bel et bien impossible.



Théorème 2: *Il n'existe pas de rétraction homotopique faible $f : \mathbb{D} \times I \to \mathbb{D}$ du disque sur son bord.*

Nous allons prouver ce théorème et voir en quoi il s'apparente au théorème du point fixe de Brouwer. Tout d'abord, nous avons besoin d'un peu de terminologie.

⌜ **Définition 3:** • Une rétraction de $\mathbb{D}$ sur S^1 est une application continue $r : \mathbb{D} \to S^1$ telle que $r|_{S^1} = Id_{S^1}$, c'est à dire que $\forall x \in S^1,\ r(x) = x$.

• Une rétraction faible de $\mathbb{D}$ sur S^1 est une application continue $r : \mathbb{D} \to S^1$ telle que $r|_{S^1}$ est à valeur dans S^1, c'est à dire que $\forall x \in S^1,\ r(x) \in S^1$.

• Une rétraction homotopique forte de $\mathbb{D}$ sur S^1 est une application continue $f : \mathbb{D} \times I \to \mathbb{D}$ telle que, avec les notations précédentes $f_0 = Id_{\mathbb{D}}$, f_1 une rétraction sur S^1 et $\forall x \in S^1,\ \forall t \in I, f_t(x) = x$. Cette dernière condition s'écrit $\forall t \in I,\ g_t = Id_{S^1}$, où g_t est la restriction de f_t au bord.

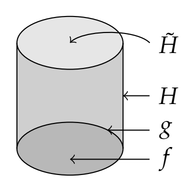
• Une rétraction homotopique faible de $\mathbb{D}$ sur S^1 est une application continue $f : \mathbb{D} \times I \to \mathbb{D}$ telle que $f_0 = Id_{\mathbb{D}}$, f_1 est une rétraction faible sur S^1 et $\forall t \in I,\ g_t$ est à valeur dans S^1. ⌟

Une rétraction faible est facilement obtenue, par exemple par une application constante qui envoie tout le disque sur un point du bord. Aucune des trois autres situations, cependant, ne peut arriver, nous allons le prouver. Mais dans un premier temps, essayons de comprendre ce qui les distingue. Dans le cas d'une rétraction homotopique forte, le bord est constamment immobile, alors que pour une rétraction homotopique faible, il est autorisé à bouger, mais continument, et en restant dans S^1. Sa dynamique est décrite par l'application $g : S^1 \times I \to S^1$, qui est un continuum d'applications entre $g_0 = Id_{S^1}$ et g_1 qui est la restriction au bord de la rétraction faible f_1. On dit que g_1 est homotope à l'identité sur S^1.

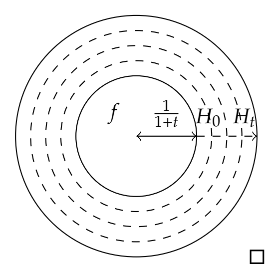
Définition 4: • Deux applications continues $f, f' : X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y sont dites homotopes s'il existe une application continue $H : X \times I \to Y$ telle que, en notant $H_t : X \to Y,\ x \mapsto H(x,t)$, on ait $H_0 = f$ et $H_1 = f'$. L'application H est appelée une homotopie.
Dans notre cas, $X = Y = S^1$ ou $X = Y = \mathbb{D}$, et on a une partie $S^1 \subseteq \mathbb{D}$ sur laquelle on veut imposer des conditions supplémentaires.
• Deux applications continues $f, f' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ induisant l'identité sur S^1, c'est-à-dire telles que $\forall x \in S^1$, $f(x) = f'(x) = x$, sont dites homotopes relativement à S^1 s'il existe une homotopie H entre f et f' telle que $\forall t \in I,\ \forall x \in S^1,\ H_t(x) = x$. Ainsi, une rétraction homotopique forte est une homotopie relative à S^1 entre une rétraction et l'identité sur $\mathbb{D}$.
• Deux applications continues $f, f' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ envoyant S^1 sur S^1, c'est-à-dire telles que $\forall x \in S^1,\ f(x) \in S^1$ et $f'(x) \in S^1$, sont dites homotopes faiblement relativement à S^1 s'il existe une homotopie H entre f et f' telle que $\forall t \in I,\ \forall x \in S^1,\ H_t(x) \in S^1$. Ainsi, une rétraction homotopique faible est une homotopie faiblement relative à S^1 entre une rétraction faible et l'identité sur $\mathbb{D}$.

Ainsi, pour une rétraction homotopique faible f, l'application f_1 est un peu plus qu'une rétraction faible : la restriction à **son bord** $g_1 = f_1|_{S^1}$ **est homotope à l'identité de** S^1**, par l'homotopie** g. L'exemple de rétraction faible donné plus haut, une constante, ne vérifie pas (cela reste à prouver) cette condition supplémentaire. Nous allons maintenant utiliser une propriété très utile de la paire $(\mathbb{D}, S^1)$ pour montrer que f_1 est en fait homotope à une rétraction, faiblement relativement au bord.

Lemme 5: *Soit $f : \mathbb{D} \to X$ une application continue et $g : S^1 \to X$ sa restriction au bord. Toute homotopie $H : S^1 \times I \to X$ de g, c'est-à-dire que $H_0 = g$, se prolonge en une homotopie $\tilde{H} : \mathbb{D} \times I \to X$ de f, c'est-à-dire que $\tilde{H}_0 = f$ et que $\forall t \in I$, la restriction de $\tilde{H}_t$ au bord est H_t. On dit que l'inclusion $S^1 \hookrightarrow \mathbb{D}$ est une cofibration.*



Preuve : Intuitivement, on veut progressivement passer de f sur $\mathbb{D}$ à f compressée sur $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ avec l'homotopie H sur $\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\mathring{\mathbb{D}} \simeq S^1 \times I$.
L'homotopie au temps t, $\tilde{H}_t$, est représentée sur le dessin ci contre :



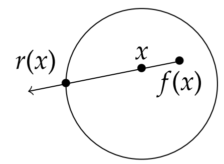
Formellement, on pose $\tilde{H}(\rho e^{2i\pi\theta}, t) = \begin{cases} f((1+t)\rho e^{2i\pi\theta}) \text{ si } \rho \leq \dfrac{1}{1+t} \\ H(e^{2i\pi\theta}, (1+t)(\rho - \dfrac{1}{1+t})) \text{ si } \rho \geq \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$.
On vérifie facilement que cette application se recolle bien à $\rho = \frac{1}{1+t}$ car $H_0 = g = f|_{S^1}$, que $\tilde{H}_0 = f$ et que la restriction de $\tilde{H}_t$ au bord est H_t. □

Si on applique ce résultat sur l'état final f_1 d'une rétraction homotopique faible f, pour l'homotopie g entre g_1 et $g_0 = Id_{S^1}$, on obtient que f_1 est homotope faiblement relativement à S^1 à une application r qui induit l'identité sur S^1 : une rétraction. Le Théorème 2 revient donc à :

Théorème 6: *Il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{D} \to S^1$ du disque sur son bord.*

Ce théorème est une reformulation du théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2 :

Preuve (Équivalence des théorèmes 6 et 1): S'il existe une rétraction $r : \mathbb{D} \to S^1$, alors $-r$ est une application continue sans point fixe de $\mathbb{D}$. En effet, pour $x \in \mathring{\mathbb{D}}$, $-r(x) \in S^1$ donc $r(x) \neq x$, et pour $x \in S^1$, $-r(x) = -x \neq x$.



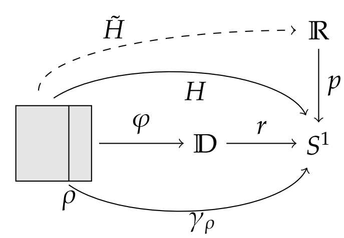
S'il existe une application continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sans point fixe, alors pour tout point x de $\mathbb{D}$, la demi droite $]f(x), x)$ est bien définie, et intersecte le cercle S^1 une et une seule fois en un point que l'on nomme $r(x)$. L'application r ainsi définie est continue et vaut l'identité sur S^1. □

On peut maintenant s'attaquer au cœur du problème, qui est la preuve du Théorème 6. On se donne une rétraction r.

Soit $\varphi : \begin{array}{ll} [0,1] \times [0,1] & \to \mathbb{D} \\ (\theta, \rho) & \mapsto \rho e^{2i\pi\theta} \end{array}$. On note γ_ρ le chemin $\begin{array}{ll} [0,1] & \to S^1 \\ \theta & \mapsto r(\rho e^{2i\pi\theta}) \end{array}$. On a donc le chemin $\gamma_1 : \theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ qui fait le tour cercle, et le chemin $\gamma_0 \equiv r(0)$ qui est constant. L'application $H = r \circ \varphi$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1. De plus, $\forall \rho \in [0,1]$, $\gamma_\rho(0) = \gamma_\rho(1)$, on dit que γ_ρ est un lacet.

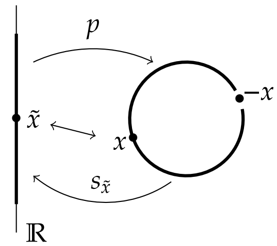
Plutôt que de travailler sur le cercle, on préfère travailler sur $\mathbb{R}$, en paramétrisant le cercle par $p : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to S^1 \\ \theta & \mapsto e^{2i\pi\theta} \end{array}$. Notons que le chemin γ_1 se factorise à travers p : si l'on pose $\tilde{\gamma}_1 : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto \theta \end{array}$, on a $p \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$. On dit que γ_1 se relève sur $\mathbb{R}$.

Cependant, si γ_1 est un lacet sur S^1 ce n'est plus le cas pour son relevé $\tilde{\gamma}_1$. En fait, $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = 1$, et cela traduit le fait que γ_1 fait une fois le tour du cercle. Cependant, γ_0 se relève en une constante (n'importe quel point de $\mathbb{R}$ qui s'envoie sur $r(0)$) et ne fait aucun tour autour du cercle. On va montrer que le fait que γ_1 soit homotope à γ_0 est dès lors absurde. Pour ce faire, on veut montrer que l'homotopie H se relève aussi dans $\mathbb{R}$.



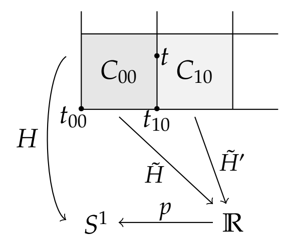
On muni S^1 de la métrique δ définie par $\delta(x, y)$ est la longueur du plus petit arc de cercle joignant x à y, divisée par 2π. Pour voir cela différemment, on peut relever x et y dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire trouver deux réels $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ tels que $p(\tilde{x}) = x$ et $p(\tilde{y}) = y$ et prendre la distance entre les deux relevés. La distance entre x et y est la plus petite distance que l'on peut obtenir ainsi : $\delta(x, y) = \inf_{p(\tilde{x})=x,\ p(\tilde{y})=y} \left|\tilde{x} - \tilde{y}\right|$. En effet, le segment $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ s'envoie par p sur un arc joignant x à y, de longueur $2\pi \left|\tilde{x} - \tilde{y}\right|$, et tout arc s'écrit sous cette forme. Si l'on se fixe un relevé $\tilde{x}'$ de x, on peut relever un l'arc $p([\tilde{x}, \tilde{y}])$ en partant de $\tilde{x}'$ avec le segment $[\tilde{x}', \tilde{y} + \tilde{x}' - \tilde{x}]$, car $\tilde{x}' - \tilde{x} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on peut réécrire $\delta(x, y) = \inf_{p(\tilde{y})=y} \left|\tilde{x}' - \tilde{y}\right|$. On muni l'espace $[0,1] \times [0,1]$ de la métrique d induite par la norme infinie : $d((a, b), (a', b')) = \max(|a - a'|, |b - b'|)$.

Quand on se restreint au voisinage d'un point x sur le cercle, il se passe quelque chose de très intéressant. Si l'on fixe un relevé $\tilde{x}$ de x, alors $\forall y \in S^1$ vérifiant $\delta(x, y) < \frac{1}{2}$, il existe un unique relevé $\tilde{y}$ de y tel que $\left|\tilde{x} - \tilde{y}\right| < \frac{1}{2}$. Un tel relevé existe par la dernière caractérisation de δ, et il est unique car deux relevés d'un même point diffèrent d'au moins 1. En fait, ce relevé est continu en y : c'est la réciproque de l'homéomorphisme $p_{\tilde{x}}$: $\begin{array}{lll}]\tilde{x}-\frac{1}{2},\tilde{x}+\frac{1}{2}[& \to & S^1 \setminus \{-x\} \\ \theta & \mapsto & p(\theta) \end{array}$. Notons ce relèvement $s_{\tilde{x}} : y \mapsto \tilde{y}$, il vérifie donc $p \circ s_{\tilde{x}} = Id_{S^1 \setminus \{-x\}}$. On dit que c'est une section de p sur $S^1 \setminus \{-x\}$. On peut avoir une idée de la situation avec la figure ci-contre.



L'application H est continue sur le compact métrique $[0,1] \times [0,1]$ donc elle y est uniformément continue. En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(s,t) \in ([0,1] \times [0,1])^2$ vérifiant $d(s,t) < \eta$, on a $\delta(H(s),H(t)) < \frac{1}{4}$. On peut maintenant procéder au relèvement de H. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \eta$, on découpe le carré $[0,1] \times [0,1]$ en n^2 carrés $\left(C_{ij} = [\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]\right)_{0 \le i,j < n}$. Sur chacun de ces carrés, H varie de moins de $\frac{1}{4}$, et on peut localement trouver des relèvements. Le tout est que ces relèvements coïncidents sur les arêtes. Pour $0 \le i,j < n$, on pose $t_{ij} = (\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ et $x_{ij} = H(t_{ij})$. Soit $\tilde{x}_{00}$ un relevé de x_{00}, sur le carré C_{00} on peut relever H en $\tilde{H} = s_{\tilde{x}_{00}} \circ H$, cela nous donne en particulier un relevé $\tilde{x}_{01} = \tilde{H}\left((\frac{0}{n},\frac{1}{n})\right)$ de x_{01} et de même des relevés $\tilde{x}_{10}$ et $\tilde{x}_{11}$.

On peut maintenant faire la même chose en partant de $\tilde{x}_{10}$. On défini $\tilde{H}'$ sur le carré C_{10} par $\tilde{H}' = s_{\tilde{x}_{10}} \circ H$. On souhaite vérifier que $\tilde{H}'$ coïncide avec $\tilde{H}$ sur l'arête $\{\frac{1}{n}\} \times [\frac{0}{n},\frac{1}{n}] = C_{00} \cap C_{10}$. Pour t dans cette arête, on a $\delta(\tilde{H}(t),\tilde{x}_{00}) < \frac{1}{4}$ et $\delta(\tilde{x}_{00},\tilde{x}_{10}) < \frac{1}{4}$ d'où $\delta(\tilde{H}(t),\tilde{x}_{10}) < \frac{1}{2}$. Or $\tilde{H}'$ est l'unique relevé de $H(t)$ à distance moins de $\frac{1}{2}$ de $\tilde{x}_{10}$. On a bien $\tilde{H}(t) = \tilde{H}'(t)$, et on peut étendre $\tilde{H}$ sur $C_{00} \cup C_{10}$.



Bien évidemment, on peut réitérer ce processus sur C_{20} en partant de $\tilde{x}_{20} = \tilde{H}(x_{20})$ et prolonger $\tilde{H}$, ainsi de suite jusqu'à $C_{n-1\,0}$. On repart ensuite à C_{01}, qui a une arête en commun avec C_{00}. Le cas est totalement symétrique à celui de C_{10} et on peut y prolonger $\tilde{H}$. On peut s'attarder un peu sur le cas de C_{11}, qui a deux arêtes consécutives en commun avec le domaine de définition de $\tilde{H}$: $C_{11} \cap C_{10}$ et $C_{11} \cap C_{01}$. On définit $\tilde{H}'$ sur le carré C_{11} par $\tilde{H}' = s_{\tilde{x}_{11}} \circ H$. Pour t dans $C_{11} \cap C_{10}$, on a $\delta(\tilde{H}(t),\tilde{x}_{10}) < \frac{1}{4}$ et $\delta(\tilde{x}_{10},\tilde{x}_{11}) < \frac{1}{4}$ d'où $\delta(\tilde{H}(t),\tilde{x}_{11}) < \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\tilde{H}(t) = \tilde{H}'(t)$. De même en échangeant 10 et 01, on obtient que $\tilde{H}$ se prolonge sur C_{11}. En continuant ligne par ligne, on obtient toujours des cas similaires, et on arrive bien à relever H en $\tilde{H}$ sur $[0,1] \times [0,1]$ tout entier.

Il ne nous reste plus qu'à compter les tours de chaque lacet γ_ρ. On définit $\tilde{\gamma}_\rho$ le chemin $\theta \mapsto \tilde{H}((\theta,\rho))$, qui relève γ_ρ. On pose $T(\rho) = \tilde{\gamma}_\rho(1) - \tilde{\gamma}_\rho(0)$. C'est une application continue sur $[0,1]$, et puisque γ_ρ est un lacet, elle est à valeur dans $\mathbb{Z}$. Elle est donc constante. On souhaite montrer, comme on l'a suggéré plus tôt, que $T(0) = 0$ et $T(1) = 1$, ce qui aboutit à un contradiction. Pour cela, il nous faut un contrôle sur la façon dont on a relevé les chemins γ_ρ.

> **Proposition 7:** *Soit $\gamma : [0,1] \to S^1$ un chemin et $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ deux relevés de γ dans $\mathbb{R}$. Si $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ alors $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$. Autrement dit, si on se fixe le relevé du point initial $\gamma(0)$, il y a une seule façon de relever γ. C'est un peu ce que nous avons vu avec H plus haut.*

Preuve : On peut étudier $\Delta = \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}'$ qui est une application continue qui vaut 0 en 0, et qui relève le chemin constant à $p(0) = 1 \in S^1$. La partie $A = \Delta^{-1}(\{0\})$ est un fermé de [0,1]. Pour $t \in A$, par continuité de Δ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t' \in [0,1]$, $|t - t'| < \varepsilon$, $|\Delta(t') - \Delta(t)| = |\Delta(t')| < \frac{1}{2}$. Or, $p(\Delta(t')) = p(0)$ donc $\Delta(t') \in \mathbb{Z}$. Nécessairement, $\Delta(t') = 0$, et $t' \in A$, ce qui montre que A est aussi ouvert. Puisque A est non vide, et que $[0,1]$ est connexe, on a $\Delta \equiv 0$ et $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$. □

On définit les lacets $\tilde{\gamma}'_0 : \theta \mapsto \tilde{H}((0,0))$ et $\tilde{\gamma}'_1 : \theta \mapsto \tilde{H}((0,1)) + \theta$, en particulier $\tilde{\gamma}'_0(0) = \tilde{H}((0,0)) = \tilde{\gamma}_0(0)$ et $\tilde{\gamma}'_1(0) = \tilde{H}((0,1)) = \tilde{\gamma}_1(0)$. De plus ils relèvent γ_0 et γ_1 car $p(\tilde{H}(0,0)) = H(0,0)$ est la valeur constante de γ_0 et $p(\tilde{H}(0,1)) = H(0,1) = e^{2i\pi 0}$ d'où $p(\tilde{\gamma}'_1(\theta)) = e^{2i\pi\theta} = \gamma_1(\theta)$. Par la proposition précédente, $\tilde{\gamma}'_0 = \tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}'_1 = \tilde{\gamma}_1$. On a donc bien $T(0) = \tilde{\gamma}_0(1) - \tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}'_0(1) - \tilde{\gamma}'_0(0) = 0$ et $T(1) = \tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}'_1(1) - \tilde{\gamma}'_1(0) = 1$. C'est absurde. Il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{D} \to S^1$, et le théorème 6 est prouvé. Par suite du Lemme 5, il n'existe pas de rétraction homotopique faible de $\mathbb{D}$ dans S^1.

Par conséquent, il n'y a aucune façon pour la mousse du café de se rétracter continument d'une répartition homogène sur la surface à une répartition homogène sur le bord sans se décoller du bord. Nécessairement, une singularité apparaît, et avec la rotation du café, elle se propage en un état chaotique et imprévisible.

On peut se poser une nouvelle question : et si on laisse la cuillère dans le café, que se passe-t-il ? Il n'y a plus le problème du "milieu", puisqu'il y a maintenant la cuillère à la place. Par contre, la mousse passe d'une répartition homogène sur la surface moins la cuillère, à une répartition homogène sur le bord de la tasse *et* le tour de la cuillère. Notre question est : existe-t-il une rétraction homotopique faible de l'anneau $A = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{10} \leq |z| \leq 1\}$ sur son bord $S^1 \cup \frac{1}{10}S^1$? Par chance, ici on a pas besoin de toute l'artillerie précédente : l'anneau A est connexe et donc ne peut se rétracter sur son bord qui ne l'est pas.

Pour aller plus loin :

• L'application $p : \mathbb{R} \to S^1$ est appelée un revêtement. Dans ce cas, c'est même le revêtement universel de S^1. Les propriétés de relèvement comme dans la preuve du Théorème 6 ou la Proposition 7 sont typiques des revêtements.

• Le fait que le lacet γ_1 qui fait un tour du cercle n'est pas homotope au lacet constant γ_0 se traduit au niveau du groupe fondamental de S^1. Le groupe fondamental est un objet très utilisé en topologie mais aussi dans de nombreuses autres branches des mathématiques. Il possède de nombreux liens avec les revêtements.

• Le résultat du Lemme 5 est appelé Propriété d'Extension d'Homotopie, une propriété très utile qui permet de définir les "bonnes" inclusions. C'est une notion clé de la théorie de l'homotopie.

• Le résultat du Théorème 1 de point fixe Brouwer (et de manière équivalente celui du Théorème 6) se généralise en dimensions supérieure. Précisément, toute application continue du disque fermé $\mathbb{D}^n$ de dimension n dans lui-même possède un point fixe (et il n'existe pas de rétraction $\mathbb{D}^n \to S^{n-1}$). La preuve ne repose plus sur l'étude du groupe fondamental, mais sur celle des groupes d'homotopie supérieurs, ou des groupes d'homologie supérieurs.

Tous ces objets sont exposés dans les chapitres 0 et 1 de [Hat02], ou dans [Ler17] en français.

Références

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`.

[Ler17] C. Leruste, *Topologie algébrique. Une introduction, et au delà*, Calvage & Mounet.