

# Rapport de Stage - L3 Mathématiques

à l'Institut Mathématiques de Toulouse  
sous la direction de Joan Bellier-Millès

Benjamin Haioun

22 juin 2018

## Table des matières

1	La cohomologie des anneaux Borroméens	1
2	Transport de structure d'algèbre par quasi-isomorphisme	4
3	Application : le produit de Massey	8

## 1 La cohomologie des anneaux Borroméens

La majeure partie de cette section est une réécriture des définitions données dans [Hat02] et [Ler17].

### 1.1 Homologie singulière

**Définition 1.** On appelle **complexe de chaîne**  $(C_\bullet, d)$  une suite de groupes abéliens, appelés chaînes, reliés par des morphismes de groupes, appelés différentielles,  $\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$  tels que pour tout entier  $n$ ,  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ .

- On appelle cycles de dimension  $n$ ,  $Z_n(C) = \ker d_n \subset C_n$  et bords de dimension  $n$ ,  $B_n(C) = \text{im } d_{n+1} \subset Z_n$
- Le  $n$ -ième groupe d'homologie est défini par  $H_n(C) = Z_n/B_n$
- On appelle morphisme de complexe de chaîne  $f : (C_\bullet, d^C) \rightarrow (D_\bullet, d^D)$  une suite de morphismes de groupe  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  commutant avec la différentielle :  $f_n \circ d_{n+1}^C = d_{n+1}^D \circ f_{n+1}$ .

**Proposition 1.** Un morphisme de complexe de chaîne  $f : (C_\bullet, d^C) \rightarrow (D_\bullet, d^D)$  induit des morphismes de groupe  $f_n^* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ ,  $\bar{x} \mapsto f_n(\bar{x})$

*Preuve :* Pour  $x \in Z_n(C)$ ,  $d_n^D(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n^C(x)) = 0$  donc  $f(x) \in Z_n(D)$  et pour  $x = d_{n+1}^C(y) \in B_n(C)$ ,  $f_n(x) = f_n(d_{n+1}^C(y)) = d_{n+1}^D(f_{n+1}(y)) \in B_n(D)$  donc  $f_n$  induit bien un morphisme  $f_n^* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ .  $\square$

### Définition 2. Homologie singulière

- On appelle simplexe de dimension  $n$ , noté  $\Delta_n$ , l'enveloppe convexe des  $n + 1$  points  $v_0 = (0, \dots, 0)$ ,  $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_{-2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$  et  $v_n = (0, \dots, 0, 1)$ . On identifie chaque facette de  $\Delta_n$  (enveloppe convexe de  $n$  des points  $v_i$ ) à  $\Delta_{n-1}$ .
- Pour  $X$  un espace topologique, on définit le  $\mathbb{Z}$  module  $CH_n(X) = \text{vect}_{\mathbb{Z}} \{ \sigma : \Delta_n \rightarrow X \text{ continues} \}$  dites chaînes singulières de dimension  $n$ . On définit alors la différentielle  $d_n : CH_n(X) \rightarrow CH_{n-1}(X)$ ,  $\sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]}$ .

**Proposition 2.** Pour tout espace topologique  $X$ ,  $(CH_\bullet, d)$  est un complexe de chaîne, i.e.  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ .  
L'homologie  $H_\bullet(X)$  définie par ce complexe de chaîne est appelée homologie singulière.

*Preuve :* Soit  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ . En enlevant  $i$  puis  $j$  :

$$d_n \circ d_{n+1}(\sigma) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n]} + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^j (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} = 0 \quad \square$$

**Définition 3.** On peut augmenter ce complexe de chaîne en ajoutant un morphisme  $\varepsilon : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\Sigma n_i \sigma_i \mapsto \Sigma n_i$ . L'homologie obtenue est appelée **homologie augmentée** notée  $\tilde{H}_\bullet(X)$ .

**Proposition 3.** Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme de complexe de chaîne

$$f^\# : CH_\bullet(X) \rightarrow CH_\bullet(Y), \sigma \mapsto f \circ \sigma \text{ et donc des morphismes entre les groupes d'homologie } f_n^* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Si  $f$  est un homéomorphisme alors  $f^\#$  est un isomorphisme de complexe de chaîne d'inverse  $(f^{-1})^\#$  et chacun des  $f_n^*$  est un isomorphisme. Ainsi si  $X$  est homéomorphe à  $Y$ ,  $H_n(X)$  est isomorphe à  $H_n(Y)$ . On dit que l'homologie singulière est invariante par homéomorphisme.

$$Preuve : d_n^Y \circ f^\#(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} = \sum_{i=0}^n (-1)^i f^\#(\sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]}) = f^\# \circ d_n^X(\sigma) \quad \square$$

**Proposition 4.** Si deux applications continues  $f$  et  $g$  de  $X$  dans  $Y$  sont homotopes entre elles alors les morphismes qu'elles induisent sur l'homologie coïncident. L'homologie singulière est donc invariante par type d'homotopie.

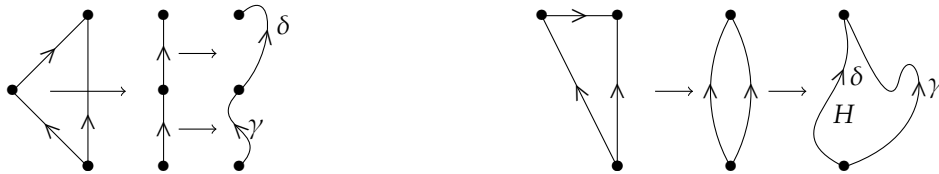
*Preuve :* Soit  $H$  réalisant l'homotopie entre  $f$  et  $g$ , et  $a = \Sigma \sigma_i$  un cycle de dimension  $n$ . On définit  $h_i : [0, 1] \times \Delta_n$ ,  $(s, x) \mapsto H(s, \sigma_i(x))$  qui peut se décrire comme une chaîne de dimension  $n + 1$ . La chaîne  $h = \Sigma h_i$  est de bord  $H(0, a) - H(1, a) = f^\#(a) - g^\#(a)$  qui coïncident donc au sens homologique.  $\square$

## 1.2 Cohomologie

**Définition 4.** Étant donné un complexe de chaîne  $C : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$  et un anneau  $G$ , on dualise  $C$  par  $\dots \leftarrow Hom(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\delta_{n+1}} Hom(C_n, G) \xleftarrow{\delta_n} Hom(C_{n-1}, G) \leftarrow \dots$  où  $\delta$  est l'application duale de  $d$  :  $\varphi \in Hom(C_n, G) \mapsto \varphi \circ d \in Hom(C_{n+1}, G)$ . Ceci forme un nouveau complexe de chaîne (en le renversant) et on peut donc définir son homologie, appelée cohomologie de  $C$ , de groupes notés  $H^n(C)$ . On note  $C^n(G) = Hom(C_n, G)$  appelées cochaînes de dimension  $n$ . Sauf précision contraire, on prendra par la suite  $G = \mathbb{Z}$ .

Un morphisme de complexe de chaîne  $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  induit en le dualisant  $f_{dual} : D^\bullet \rightarrow C^\bullet$ .

En dimension 1, une cochaîne  $\varphi$  est une façon d'associer une valeur à chaque chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . La condition d'être un cocycle est : pour tout triangle  $T : \Delta_2 = [v_0, v_1, v_2] \rightarrow X$ ,  $\varphi(T|_{[v_0, v_1]}) + \varphi(T|_{[v_1, v_2]}) - \varphi(T|_{[v_0, v_2]}) = 0$ . Soit deux cas principaux : la concaténation et l'homotopie. Les figures suivantes donnent les conditions :



si  $\gamma(1) = \delta(0)$  alors  $\varphi(\gamma \cdot \delta) = \varphi(\gamma) + \varphi(\delta)$  et si  $\gamma$  et  $\delta$  sont homotopes alors  $\varphi(\gamma) = \varphi(\delta)$ .

En fait  $\varphi$  est un cocycle si et seulement si elle vérifie ces propriétés car  $T|_{[v_0, v_1]} \cdot T|_{[v_1, v_2]}$  est homotope à  $T|_{[v_0, v_2]}$  d'où  $\varphi(T|_{[v_0, v_1]}) + \varphi(T|_{[v_1, v_2]}) - \varphi(T|_{[v_0, v_2]}) = \varphi(T|_{[v_0, v_1]} \cdot T|_{[v_1, v_2]}) - \varphi(T|_{[v_0, v_2]}) = 0$

**Proposition 5** (petites chaînes). Soit  $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$  un recouvrement d'ouverts d'un espace topologique  $X$ . On appelle petites chaînes les chaînes générées par les applications  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  d'image incluse dans un certain  $U_i, i \in I$ . On les notent  $CH_\bullet^{\mathcal{U}}$ . L'inclusion induit des isomorphismes  $H_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \cong H_\bullet(X)$  et  $H^\bullet(X) \cong H_{\mathcal{U}}^\bullet(X)$ .

**Proposition 6.** Soit  $h : H^n(X) \rightarrow Hom(H_n(X), \mathbb{Z})$  qui a  $\varphi$  associe le morphisme qui a un cycle  $\Sigma \sigma_i$  associe la valeur  $\varphi(\Sigma \sigma_i)$ . Si les groupes d'homologie sont libres et finiment générés, alors  $h$  est un isomorphisme.

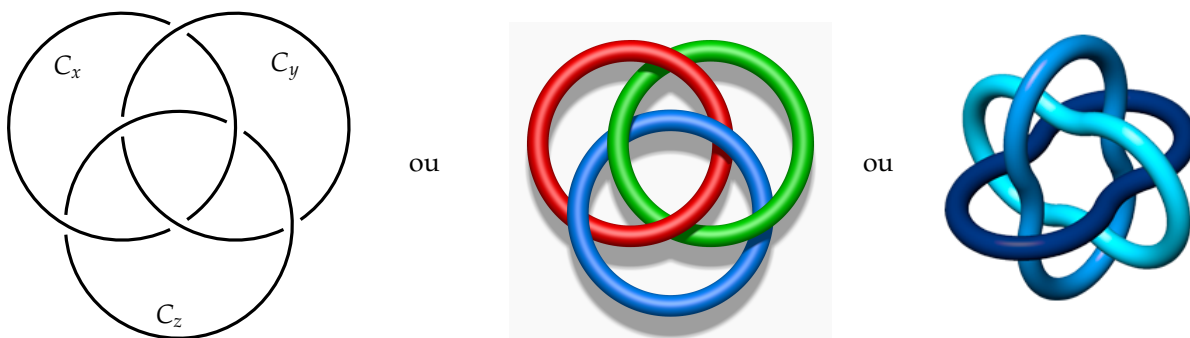
**Définition 5.** Soit  $\varphi \in CH^k(X)$  et  $\psi \in CH^l(X)$ , on définit leur produit cup  $\varphi \cup \psi \in CH^{k+l}(X)$  associant à  $\sigma : [v_0, \dots, v_{k+l}] \rightarrow X$  la valeur  $(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \times \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$ .

**Proposition 7.** Le produit  $\cup$  vérifie la propriété de dérivation suivante :  $\delta(\varphi \cup \psi) = (\delta\varphi) \cup \psi + (-1)^k \varphi \cup (\delta\psi)$   
 Il induit un produit sur les groupes de cohomologie, aussi noté  $\cup : H^k(X) \times H^l(X) \rightarrow H^{k+l}(X)$ , où il est associatif et commutatif au sens que  $\psi \cup \varphi = (-1)^{kl} \varphi \cup \psi$ .

Le morphisme  $f_{dual}^* : (H^\bullet(Y), \cup) \rightarrow (H^\bullet(X), \cup)$  induit par une fonction continue  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme d'algèbre. Cette structure est donc invariante par type d'homotopie.

### 1.3 Les anneaux Borroméens

On appelle anneaux Borroméens la partie  $K_B$  de  $S^3 \cong B^3/\partial B^3$  représentée ci dessous :



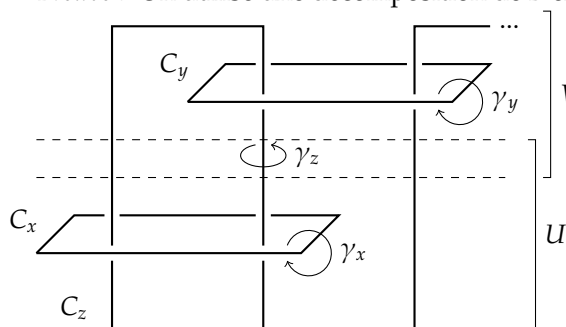
On appelle  $B$  son complémentaire dans  $S^3$ . On souhaite comparer la cohomologie de  $B$  avec celle du complémentaire de trois cercles non enlacés dans  $S^3$ , noté  $B'$ .

**Théorème 1** (Dualité d'Alexander). Si  $K$  est une partie compacte non vide localement contractible incluse strictement dans  $S^n$ , alors pour tout entier  $i$ ,  $\tilde{H}_i(S^n \setminus K) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K)$ .

Les anneaux Borroméens  $K_B$  étant homéomorphes à trois anneaux non enlacés, les groupes d'homologie de  $B$  et  $B'$  coïncident. On a  $\tilde{H}_0(B) = 0$ ,  $\tilde{H}_1(B) = \mathbb{Z}^3$ ,  $\tilde{H}_2(B) = \mathbb{Z}^2$  et  $\tilde{H}_3(B) = 0$ . Les groupes d'homologie ne permettant pas de différencier ces espaces, on souhaite compléter cette information en calculant les produits  $\cup$ .

**Proposition 8.** Le premier groupe d'homologie de  $B$  est engendré par les trois lacets  $\gamma_x, \gamma_y$  et  $\gamma_z$  qui s'enroulent autour des trois cercles  $C_x, C_y$  et  $C_z$  (les noms sont indiqués sur la figure). Il en est de même pour  $B'$ .

*Preuve :* On utilise une décomposition de  $B$  en deux ouverts  $U$  et  $V$  :



En utilisant une séquence de Mayer-Vietoris  $H_1(U \cap V) \xrightarrow{(+i, -i')} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{i_U + i_V} H_1(X) \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V)$  on obtient que  $H_1(X)$  est engendré par  $\gamma_x, \gamma_y$  et le recollement des différents  $\gamma_z$  ( $C_z$  ayant été découpé entre  $U$  et  $V$ ).

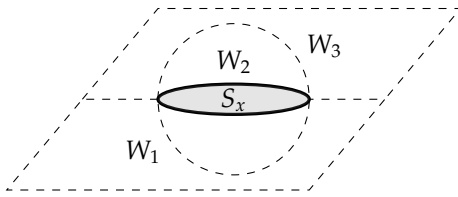
□

Les groupes d'homologie étant libres et finiment générés, leurs duals sont isomorphes aux groupes de cohomologie. Ainsi on appelle  $x$  l'élément de  $H^1(B)$  qui associe 1 à  $\gamma_x$  et 0 aux deux autres.

Le cercle  $C_x$  étant plan dans la figure ci-dessus, on peut définir  $S_x$  son enveloppe convexe dans  $B$  ainsi représenté.

**Proposition 9.** L'élément  $x$  est représenté par le cocycle  $1_{S_x}$  qui, à un chemin, associe son nombre de passages (orientés) à travers  $S_x$ .

*Preuve* : Le lacet  $\gamma_x$  traverse bien une fois  $S_x$  et les deux autres ne la traversent pas. Il nous faut donc seulement montrer que  $1_{S_x}$  est un cocycle. Il est évident par sa définition qu'il est un morphisme pour la concaténation. L'invariance par homotopie est plus technique :



On peut séparer le tour du cercle en trois ouverts, où  $W_2$  est la boule,  $W_3$  la partie au dessus du plan contenant  $S_x$  et  $W_1$  la partie en dessous. On peut alors séparer un chemin en une concaténation de chemins à image dans l'un des ouverts, et à extrémité dans une intersection de deux d'entre eux.

Ceci donne un mot de  $W_1, W_2$  et  $W_3$  où un tour dans le sens positif correspond à un sous mot  $W_1W_2W_3$  et dans le sens négatif à un sous mot  $W_3W_2W_1$ . Ces mots étant localement constants sous homotopie,  $1_{S_x}$  est invariant par homotopie, et est donc un cocycle représentant  $x$ .  $\square$

**Proposition 10.** *Le produit  $x \cup y$  est trivial. Le produit  $\cup$  est donc trivial sur  $H^\bullet(B)$*

*Preuve* : On définit de la même manière  $S_y$  et  $1_{S_y}$ . On a alors  $S_x \subset U \setminus V$  et  $S_y \subset V \setminus U$ . Par définition, le cocycle  $1_{S_x} \cup 1_{S_y}$  est nul sur tout triangle  $T : [v_0, v_1, v_2] \rightarrow B$  d'image incluse dans  $U$  (donc ne pouvant traverser  $S_y$ ) ou dans  $V$  (donc ne pouvant traverser  $S_x$ ). Par la proposition des petites chaînes, la projection  $x \cup y$  de  $1_{S_x} \cup 1_{S_y}$  sur  $H^1(B)$  est nulle.

Le produit  $x \cup x = (-1)^{1 \times 1} x \cup x$  est nul par commutativité de  $\cup$ . Le générateur de  $H_0(B)$  est le neutre de  $\cup$ . Les groupes de cohomologie étant triviaux en dimension supérieure ou égale à 3, tout autre produit est nul.  $\square$

On peut appliquer le même raisonnement sur  $B'$ . **Les groupes de cohomologie munis du produit  $\cup$  ne permettent donc pas de distinguer les anneaux Borroméens de trois anneaux non enlacés.**

## 2 Transport de structure d'algèbre par quasi-isomorphisme

Cette section est principalement inspirée de [Val14], certaines définitions étant précisées dans [LV12].

### 2.1 Algèbre différentielle graduée

**Définition 6.**

- On appelle **espace vectoriel gradué** un espace vectoriel  $V$  qui peut se décomposer en  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ . Un élément  $v$  de  $V_n$  est dit de degré de  $n$ . On note  $|v| = n$ .
- Un **morphisme d'espace vectoriel gradué**  $f : V \rightarrow W$  de degré  $k$  est une suite de morphismes  $f_n : V_n \rightarrow W_{n+k}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . On note  $|f| = k$ .
- Un **espace vectoriel différentiel gradué**, dit dg, est un espace vectoriel gradué  $V$  muni d'une différentielle  $d_V : V \rightarrow V$  de degré  $-1$  qui vérifie  $d_V^2 = 0$ . On peut alors définir l'homologie  $H_\bullet(V)$  de manière classique.
- Pour  $f : V \rightarrow W$  un morphisme d'espace vectoriel gradué sur des espaces dg, on peut définir son bord  $\partial(f) = [f, d] = d_W \circ f - (-1)^k f \circ d_V$ . L'application  $f$  est dite **morphisme d'espace vectoriel différentiel gradué** si  $\partial(f) = 0$ , i.e.  $d_W \circ f_n = (-1)^k f_{n-1} \circ d_V$ .

Pour  $V$  et  $W$  des espaces dg, on peut définir leur produit tensoriel par  $(V \otimes W)_n = \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$  et  $d_{V \otimes W}(v \otimes w) = d_V v \otimes w + (-1)^{|v|} v \otimes d_W w$ . Pour définir le produit tensoriel de deux morphisme d'espace dg, on utilise règle de signe de Koszul :  $(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|g||a|} f(a) \otimes g(b)$ .

**Définition 7.** On appelle **algèbre différentielle graduée** un espace dg  $A$  muni d'un morphisme d'espace dg  $\mu : A^{\otimes 2} \rightarrow A$ , de degré 0. Le produit  $\mu$  vérifie donc une propriété de dérivation :  $d\mu = \mu(d, -) + \mu(-, d)$ . L'algèbre est dite associative si  $\mu$  l'est, c'est à dire si  $\mu \circ (Id \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes Id)$ .

## 2.2 Isomorphisme

Disposant d'une algèbre différentielle graduée associative  $(A, d_A, \mu)$  isomorphe en tant qu'espace dg à un autre espace dg  $(V, d_V)$ , on souhaite transporter la structure d'algèbre associative de  $A$  à  $V$ .

**Proposition 11.** Si  $\varphi : V \rightarrow A$  est un isomorphisme d'espace dg à valeur dans une algèbre différentielle graduée associative, il permet de relever le produit de  $A$  en un produit associatif sur  $V$  donné par  $\tilde{\mu} = \varphi^{-1} \circ \mu \circ (\varphi \otimes \varphi)$ .

*Preuve :* En notant pour plus de clarté les produits  $\mu = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$  et  $\tilde{\mu} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$  alors :

car  $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id$  et  $\mu$  est associatif.  $\square$

## 2.3 Quasi-isomorphisme

**Définition 8.** Un espace dg  $V$  est appelé **rétract d'homotopie** de  $A$  s'il existe  $i : V \rightarrow A$  de degré 0,  $p : A \rightarrow V$  de degré 0 et  $h : A \rightarrow A$  de degré 1 tels que  $Id - ip = \partial(h)$  et que  $i$  soit un quasi isomorphisme, c'est-à-dire que  $i^* : H_*(V) \rightarrow H_*(A)$  est un isomorphisme. On obtient le diagramme  $h \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} A \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{p} \end{array} V$ . Le morphisme  $i$  est ainsi un isomorphisme d'inverse  $p$  seulement à homotopie près. L'asymétrie de cette définition s'explique en remarquant que, dans la preuve précédente de l'associativité du produit  $\tilde{\mu}$ , on a utilisé  $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id$  et pas la composition inverse.

On peut, dans ce contexte, définir le produit induit de la même façon que pour un isomorphisme :  $\tilde{\mu} = p \circ \mu \circ (i \otimes i)$ . Seulement, avec les mêmes notations que précédemment,

ce qui n'est pas, en général, égal à 0. En fait, l'associativité de  $\tilde{\mu}$  n'est vérifiée qu'à homotopie près, c'est à dire que le commutateur étudié ci-dessus est égal au bord ( $\partial$ ) d'un certain produit à trois éléments que l'on note  $\mu_3$ . Du point de vue de l'homologie, ce terme est trivial, et le produit peut donc être considéré comme quasi-associatif.

## 2.4 Produits d'ordre supérieur

### 2.4.1 Construction de $\mu_3$

Pour obtenir l'associativité "à homotopie près" du produit induit, on souhaite donc construire explicitement  $\mu_3$  (noté  $\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$ ). Les calculs précédents nous invitent à poser :

ce qui se lit de manière formelle :

$$\mu_3 = p \circ \mu \circ (h \otimes i) \circ (\mu \otimes Id) \circ (i \otimes i \otimes Id) - p \circ \mu \circ (i \otimes h) \circ (Id \otimes \mu) \circ (Id \otimes i \otimes i)$$

En appliquant la règle de signe de Koszul :

$$\mu_3(a \otimes b \otimes c) = p \circ \mu \left( h \circ \mu(i(a) \otimes i(b)) \otimes i(c) \right) - (-1)^{|a|} p \circ \mu \left( i(a) \otimes h \circ \mu(i(b) \otimes i(c)) \right)$$

Le produit  $\mu_3$  est de degré +1 car  $h$  l'est et que  $i$  et  $p$  sont de degré 0. Il vérifie bien les propriétés attendues :

$$\begin{aligned}
\partial(\text{Y}) &= \begin{array}{cccccccc}
\begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \circ p \end{array} & + & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & + & \begin{array}{c} i \quad d \circ i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & + & \begin{array}{c} d \circ i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \circ p \end{array} & - & \begin{array}{c} d \quad i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} d \circ i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} i \quad d \circ i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array}
\end{array} \\
&\begin{array}{cccccccc}
\swarrow \text{dérivation} & & \searrow & & \swarrow \text{anti-dérivation} & & \swarrow \text{dérivation} & & \searrow & & \swarrow \text{anti-dérivation} & & \searrow \\
\begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ dh \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & + & (-1)^{|h||d|} \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & + & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & + & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ hd \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ dh \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} d \circ i \quad h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & (-1)^{|h||d|} \begin{array}{c} d \circ i \quad h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} d \circ i \quad h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} i \quad hd \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} \\
&= & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \partial h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & - & \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \partial h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} & = & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & - & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}
\end{array}
\end{aligned}$$

### 2.4.2 Construction de $\mu_n, n \geq 4$

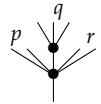
On s'intéresse maintenant aux relations entre  $\mu_2 = \mu$  et  $\mu_3$ , et notamment à une relation d'associativité mixte : y a-t-il un lien entre  $\mu_3(a, b, \mu_2(c, d))$ ,  $\mu_3(a, \mu_2(b, c), d)$ ,  $\mu_3(\mu_2(a, b), c, d)$ ,  $\mu_2(\mu_3(a, b, c), d)$  et  $\mu_2(a, \mu_3(b, c, d))$ ? La réponse est oui et une combinaison de ces termes (avec signes) s'écrit comme le bord d'un produit à quatre éléments :  $\mu_4$ . L'idée est de poser, de manière similaire à la définition de  $\mu_3$ ,

$$\mu_n = \text{Y} = \sum_{PBE_n} \pm \begin{array}{c} i \quad i \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ h \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} \quad \text{où } PBE_n \text{ représente les arbres planaires binaires enracinés à } n \text{ feuilles.} \\
\mu_n \text{ est de degré } n - 2 \text{ car } h \text{ y apparaît } n - 2 \text{ fois.}$$

**Proposition 12.**  $\partial(\mu_n) = \sum_{p+q+r=n} (-1)^{p+qr} \mu_{p+r+1} \circ (Id^{\otimes p} \otimes \mu_q \otimes Id^{\otimes r})$

### 2.5 Algèbre $A_\infty$

**Définition 9.** On appelle algèbre  $A_\infty$  un espace dg  $A$  muni d'une famille de produits  $(\mu_n : A^{\otimes n} \rightarrow A)_{n \geq 2}$  de degrés  $n - 2$  vérifiant :  $\partial(\mu_n) = \sum_{p+q+r=n} (-1)^{p+qr} \mu_{p+r+1} \circ (Id^{\otimes p} \otimes \mu_q \otimes Id^{\otimes r})$  :



**Proposition 13.** Un rétract par homotopie  $h \text{C}_{\leftarrow} A \xleftarrow[p]{i} V$  sur une algèbre dg associative  $(A, \mu)$  induit une structure d'algèbre  $A_\infty$  sur  $V$  telle que  $i \circ \mu_2 = \mu \circ (i \otimes i)$ .

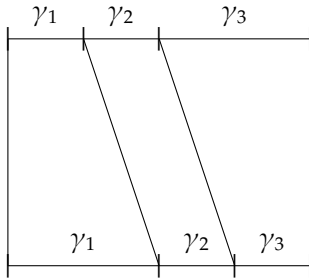
**Théorème 2 (Transfert Homotopique).** Un rétract par homotopie  $h \text{C}_{\leftarrow} A \xleftarrow[p]{i} V$  sur une algèbre  $A_\infty$   $A$  induit une structure d'algèbre  $A_\infty$  sur  $V$  telle que  $i$  soit un  $\infty$ -quasi-isomorphisme.

#### 2.5.1 Espace de lacets

Pour clarifier la signification des relations de cohérence entre les produits introduits précédemment, on peut étudier l'exemple des espaces de lacets. Soit  $(X, x)$  un espace pointé, on note l'ensemble des lacets pointés  $\Omega X = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X / \gamma(0) = \gamma(1) = x\}$  muni de la topologie compacte-ouverte. On peut définir le produit de la concaténation  $\cdot : (\Omega X)^2 \rightarrow \Omega X, (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$ . Il n'est pas associatif en général :

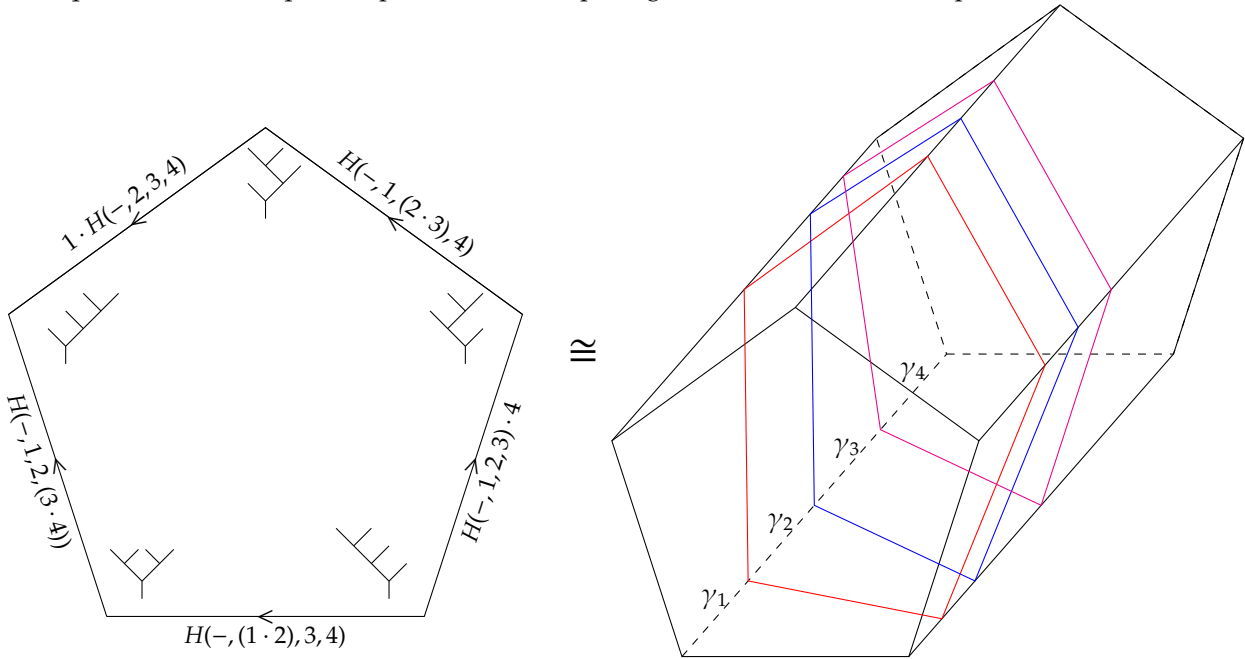
$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 = \begin{array}{c} \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \end{array}, \text{ alors que } \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3) = \begin{array}{c} \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \end{array}$$

Cependant, il est associatif à homotopie près :



C'est à dire qu'il existe une homotopie  $H : [0, 1] \times (\Omega X)^3 \rightarrow \Omega X$  tel que  $H(0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$  et  $H(1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ . Ce  $H$  représente le  $\mu_3$  précédemment défini : c'est un produit à trois éléments, de "bord" le défaut d'associativité du produit.

On peut ensuite s'intéresser aux différents produits que l'on peut réaliser avec quatre éléments. On obtient les cinq arbres suivants, que l'on peut relier en un pentagone en utilisant l'homotopie  $H$  :



On souhaite "remplir" le pentagone, noté  $K_2$ , c'est à dire définir une fonction  $H_4 : K_2 \times (\Omega X)^4 \rightarrow \Omega X$  qui à chaque point du pentagone associe continument un lacet et qui coïncide avec les homotopies décrites ci-dessus sur le bord du pentagone. Une fois les homotopies réalisées le long du pentagone explicitées comme sur la figure de droite, il devient clair que c'est possible. Les changements de lacet se font sur trois cercles disjoints bien ordonnés qu'il est facile de remplir en des disques disjoints. On peut alors compléter en appliquant  $\gamma_1$  entre le bord extérieur et le premier disque, etc...

Autrement dit le lacet (dans l'espace des lacets) qui consiste à faire le tour du pentagone est homotopiquement trivial, puisqu'il peut s'étendre sur son intérieur. Ainsi, l'homotopie qui permet de passer d'un produit de quatre éléments à un autre est bien définie à homotopie près.

De même en dimensions supérieures, toutes les façons de parenthéser un produit à  $n$  termes sont reliées par des liens extraits de ceux qui relient les produits à  $i$  termes,  $i < n$ , et toutes ces homotopies forment un  $n - 3$  cycle. Il est une fois de plus homotopiquement trivial et peut être rempli par une homotopie  $H_n$ .

**Théorème 3.** [Sta63]

Soit  $X$  un espace topologique, le produit de la concaténation sur  $\Omega X$  peut être complété en une série de produits  $H_n : K_{n-2} \times (\Omega X)^n \rightarrow \Omega X$  où  $K_{n-2}$  est un polygone de dimension  $n - 2$  de sommets les différentes façons de parenthéser un produit à  $n$  termes, d'arêtes les homotopies  $H_3 = H$  entre ces produits, de faces de dimension 2 les homotopies  $H_4$  entre ces homotopies (quand elles forment un cycle) etc... tel que sur chaque face,  $H_n$  coïncide avec les  $H_i$ ,  $i < n$ .

On dit que  $\Omega X$  est un  $A_\infty$ -espace.

La construction de  $H_4$  donne une idée de la preuve.

## 2.5.2 Opérades

**Définition 10** (Généralisation des différentes définitions de types d'algèbres). [May72] ou [LV12]

• Une **opérade** (non symétrique) est une suite d'espaces topologiques compacts (ou plus généralement compactement générés)  $C(j)$ ,  $j \geq 0$ , qui sont les produits d'arité  $j$ , avec  $C(0) = \{*\}$  est un point, munis :

— de fonctions de composition continues  $\gamma : C(k) \times C(j_1) \times \dots \times C(j_k) \rightarrow C(\Sigma j_m)$  telles que pour  $c \in C(k)$ ,  $d_1, \dots, d_k \in C(j_1) \times \dots \times C(j_k)$  et  $e_1, \dots, e_{\Sigma j_i} \in C(i_1) \times \dots \times C(i_{\Sigma j_m})$ , la composition de  $c$  avec les  $k$  produits  $d$ , qui est un produit d'arité  $\Sigma j_m$ , composée avec les  $\Sigma j_m$  produits  $e$  est bien la même chose que la composition de  $c$  avec chacun des produits  $d$  déjà composés avec les produits  $e$  appropriés :

$$\gamma(\gamma(c, d_1, \dots, d_s), e_1, \dots, e_{\Sigma j_i}) = \gamma(c, \gamma(d_1, e_1, \dots, e_{j_1}), \gamma(d_2, e_{j_1+1}, \dots, e_{j_1+j_2}), \dots, \gamma(d_s, e_{j_1+\dots+j_{s-1}+1}, \dots, e_{\Sigma j_i}))$$

— et d'une identité  $1 \in C(1)$  telle que  $\gamma(1, d) = d$  et  $\gamma(c, 1, \dots, 1) = c$

• Un **morphisme d'opérades**  $\psi : C \rightarrow C'$  est une suite de morphisme  $\psi_j : C(j) \rightarrow C'(j)$  cohérents avec la composition  $\gamma$  vérifiant  $\psi_1(1) = 1'$ .

• Un espace topologique compact (ou compactement généré)  $X$  pointé par un point  $x \in X$  qui est un rétract par déformation d'un de ses voisinages (ou tel que  $(X, x)$  est une NDR-paire) est muni de son **opérade des endomorphismes**  $\mathcal{E}_X$  défini par :  $(\mathcal{E}_X)(k)$  est l'ensemble des fonction continues pointées  $f : X^k \rightarrow X$ , et  $(\mathcal{E}_X)_0$  est l'inclusion  $\{x\} \hookrightarrow X$ . La composition est donnée par  $\gamma(f, g_1, \dots, g_k) = f(g_1 \times \dots \times g_k)$  et  $1$  est bien l'identité sur  $X$  au sens classique. L'espace topologique  $X$  est appelé  $C$ -espace s'il existe un morphisme d'opérades  $\psi : C \rightarrow \mathcal{E}_X$ .

*Exemple.* L'opérade  $As$  est donnée par  $As(k) = \{*\}$  est un point. La composition et les permutations sont donc triviales. En notant  $\mu = \psi_2(*)$  le produit d'arité 2, l'associativité est donnée par le fait que  $\gamma(\mu, \mu, 1)$  et  $\gamma(\mu, 1, \mu)$  étant tous deux éléments de  $As(3)$  qui est un point, ils coïncident :  $\mu(\mu, Id) = \gamma(\mu, \mu, 1) = * = \gamma(\mu, 1, \mu) = \mu(Id, \mu)$ .

L'opérade  $A_\infty$  est donnée par  $A_\infty(k) = K_{k-2}$  le  $(k-2)$ -ième polygone de Stasheff. Les sommets étant décrits par les parenthésages d'un produit à  $k$  termes, la composition est naturelle. On a ainsi un continuum de produit  $\psi_3(s)$ ,  $s \in [0, 1] = K_1$  qui relie  $\gamma(\mu, \mu, 1)$  et  $\gamma(\mu, 1, \mu)$  réalisant l'associativité à homotopie près. On peut noter comme pour l'espace des lacets  $H(s, a, b, c) = \psi_3(s)(a, b, c)$  cette homotopie, puis pour  $s$  appartenant au pentagone  $K_2$ ,  $H_4(s, a, b, c, d) = \psi_4(s)(a, b, c, d)$ , etc...

**Proposition 14.** Une structure d' $A_\infty$ -espace sur un espace topologique  $X$  induit une structure d'algèbre  $A_\infty$  sur ses chaînes singulières en définissant pour  $\sigma_i : \Delta_{k_i} \rightarrow X \in CH_{k_i}(X)$ ,  $i \leq n$ , leur produit au sens des chaînes  $\mu_n^C(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  comme étant la chaîne de dimension  $n-2 + \Sigma k_i$  qui a un élément  $(k, x_1, \dots, x_n) \in K_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_n}$  (qui peut se décomposer en simplexes de dimension  $n-2 + \Sigma k_i$ ) associe  $\mu_n(k, \sigma_1(x_1), \dots, \sigma_n(x_n))$ .

$$\text{Preuve : } \partial(\mu_n^C) = d\mu_n^C(\sigma_1, \dots, \sigma_n) - \Sigma \mu_n^C(\sigma_1, \dots, d\sigma_i, \dots, \sigma_n) = \mu_n^C|_{d(K_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_n})} - \Sigma \mu_n^C|_{K_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times d\Delta_{k_i} \times \dots \times \Delta_{k_n}}$$

Mais  $d(K_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_n}) = dK_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_n} + \Sigma(K_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times d\Delta_{k_i} \times \dots \times \Delta_{k_n})$  soit :

$\partial(\mu_n) = \mu_n|_{dK_{n-2} \times \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_n}}$  qui, puisque  $X$  est un  $A_\infty$ -espace, est précisément la somme attendue pour que  $CH^\bullet(X)$  soit une  $A_\infty$  algèbre.  $\square$

## 3 Application : le produit de Massey

Nous allons ici distinguer les anneaux Borroméens des anneaux non enlacés à l'aide du produit de Massey. Cette partie est en grande majorité un travail personnel, même si le résultat est lui bien connu.

### 3.1 Définitions

Pour  $X$  un espace topologique, le produit de Massey est un enrichissement de la structure d'algèbre associative sur sa cohomologie singulière. Il prend en argument trois éléments de  $H^\bullet(X)$ .

### 3.1.1 Définition originelle

Le produit de Massey originel (voir [Mas58]) est défini pour trois éléments  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{z}$  de  $H^\bullet(X)$  tels que  $\bar{x} \cup \bar{y} = 0$  et  $\bar{y} \cup \bar{z} = 0$  dans  $H^\bullet(X)$ , c'est à dire qu'il existe des cochaines  $\varphi_{xy}$  et  $\varphi_{yz}$  tels que  $\delta\varphi_{xy} = x \cup y$  et  $\delta\varphi_{yz} = y \cup z$ . On définit alors  $m_3(x, y, z) = \varphi_{xy} \cup z - (-1)^{|x|} x \cup \varphi_{yz}$ .

**Proposition 15.**  $m_3(x, y, z)$  ainsi défini est un cocycle de dimension  $|x| + |y| + |z| - 1$ .

Sa projection sur  $H^\bullet(X)/(H^\bullet(X) \cup \bar{z} + \bar{x} \cup H^\bullet(X))$  ne dépend pas du choix de  $\varphi_{xy}$  et  $\varphi_{yz}$ , ni de celui des représentant de  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{z}$ . On peut ainsi définir  $m_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in H^\bullet(X)/(H^\bullet(X) \cup \bar{z} + \bar{x} \cup H^\bullet(X))$

*Preuve :* Du fait que  $x, y$  et  $z$  sont des cocycles et que  $\cup$  est associatif, on a :

$$\delta m_3(x, y, z) = (-1)^{|\varphi_{xy}|} \varphi_{xy} \cup \delta z + \delta \varphi_{xy} \cup z - x \cup \delta \varphi_{yz} - (-1)^{|x|} \delta x \cup \varphi_{yz} = (x \cup y) \cup z - x \cup (y \cup z) = 0$$

Les cochaines  $\varphi_{xy}$  et  $\varphi_{yz}$  sont définies à un cocycle près donc  $m_3(x, y, z)$  à un élément de  $(H^\bullet(X) \cup \bar{z} + \bar{x} \cup H^\bullet(X))$

près. Si on ajoute un bord  $\delta x'$  à  $x$  on obtient :  $m_3(x + \delta x', y, z) = \varphi_{x+\delta x', y} \cup z - (-1)^{|x|} (x + \delta x') \cup \varphi_{yz}$ .

Or  $(x + \delta x') \cup y = x \cup y + \delta(x' \cup y) - (-1)^{|x'|} x' \cup \delta y$  soit  $\varphi_{x+\delta x', y} = \varphi_{xy} + x' \cup y$  convient. On a donc

$$m_3(x + \delta x', y, z) = (\varphi_{xy} + x' \cup y) \cup z - (-1)^{|x|} (x + \delta x') \cup \varphi_{yz} = m_3(x, y, z) + (x' \cup y) \cup z - (-1)^{|x|} (\delta(x' \cup \varphi_{yz}) - (-1)^{|x'|} x' \cup (\delta \varphi_{yz}))$$

$$D'où m_3(x + \delta x', y, z) - m_3(x, y, z) = (x' \cup y) \cup z - x' \cup (y \cup z) + (-1)^{|x|} \delta(x' \cup \varphi_{yz})$$

Le produit  $m_3(x, y, z)$  ne dépend donc pas, dans  $H^\bullet(X)/(H^\bullet(X) \cup \bar{z} + \bar{x} \cup H^\bullet(X))$ , du choix du représentant de  $\bar{x}$ .

Il en est de même pour  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$ .  $\square$

**Proposition 16.** La structure  $(H^\bullet, \cup, m_3)$  est invariante par type d'homotopie.

*Preuve :* pour  $f$  réalisant l'équivalence d'homotopie,  $df^\#(\varphi_{xy}) = f^\#(x) \cup f^\#(y)$ , d'où

$$f^\#(m_3(x, y, z)) = f^\#(\varphi_{xy}) \cup f^\#(z) - (-1)^{|x|} f^\#(x) \cup f^\#(\varphi_{yz})$$
 est un représentant de  $m_3(f^\#(x), f^\#(y), f^\#(z))$ .  $\square$

### 3.1.2 Définition $A_\infty : \mu_3$

On considère à partir de maintenant les cochaines à valeur dans un corps  $R : C^n = Hom(C_n, R)$ .

**Proposition 17.** Les cochaines  $CH^\bullet(X)$  se décomposent en  $CH^n \cong B^n \oplus H^n \oplus B^{n+1}$  où  $\delta$  se restreint à l'application nulle sur  $B^n \oplus H^n$  et se restreint en un isomorphisme  $B^{n+1} \subset CH^n \rightarrow B^{n+1} \subset CH^{n+1}$  (d'où l'utilisation des mêmes notations).

Dans ces conditions l'espace dg  $(H^\bullet(X), 0)$ , de différentielle nulle, est un rétract d'homotopie de  $(CH^\bullet(X), \delta)$  par les morphismes  $i : H^\bullet \hookrightarrow CH^\bullet$  et  $p : CH^\bullet \twoheadrightarrow H^\bullet$  naturels et  $h : CH^n \cong B^n \oplus H^n \oplus B^{n+1} \twoheadrightarrow B^n \hookrightarrow B^{n-1} \oplus H^n \oplus B^n \cong CH^{n-1}$  qui à un bord associe sa pré-image canonique par  $\delta$ .

*Preuve :* Les morphismes  $i, p$  et  $h$  vérifient  $Id - ip = \delta h + h\delta$  car  $ip$  est la projection sur  $H^n$ ,  $\delta h$  la projection sur  $B^n$  et  $h\delta$  celle sur  $B^{n+1}$ .  $\square$

On peut donc transférer sur  $H^\bullet(X)$  une structure  $A_\infty : \{\mu_n, n \geq 2\}$  héritée du produit  $\cup$ . Le produit  $\mu_3$  est ainsi défini sans conditions du nullité de  $\cup$ , sur  $(H^\bullet(X))^{\otimes 3}$  et à valeur dans  $H^\bullet(X)$ . On a la formule  $\mu_3(x, y, z) = h(x \cup y) \cup z - (-1)^{|x|} x \cup h(y \cup z)$ .

**Proposition 18.** Pour tous  $x, y, z \in H^\bullet(X)$  dont le produit  $m_3$  est bien défini,  $\mu_3(x, y, z)$  produit un représentant canonique de  $m_3(x, y, z)$  dans  $H^\bullet(X)/(H^\bullet(X) \cup \bar{z} + \bar{x} \cup H^\bullet(X))$ .

*Preuve :* On sait que  $x \cup y$  est le bord d'une cochaîne  $\varphi_{xy}$  que l'on choisit canonique donc dans  $B^{|x|+|y|} \subset CH^{|x|+|y|-1}$ .

On a alors  $h(x \cup y) = \varphi_{xy}$ . On obtient :  $\mu_3(x, y, z) = \varphi_{xy} \cup z - (-1)^{|x|} x \cup \varphi_{yz} = m_3(x, y, z)$ .  $\square$

*Attention.* Le produit  $\mu_3$  ainsi défini n'est pas invariant par type d'homotopie au sens classique (i.e. à isomorphisme près). Il l'est cependant à  $\infty$ -quasi-isomorphisme près.

### 3.2 Anneaux Borroméens

On souhaite appliquer le produit de Massey aux trois générateurs de  $H^1(B)$  (notés  $x, y$  et  $z$ ) et montrer qu'il est distinct du produit des trois générateurs de  $H^1(B')$  (notés  $X, Y$  et  $Z$ ). On remarque que le produit  $\cup$  étant trivial sur les deux cohomologies considérées, le produit de Massey  $m_3$  est bien défini, à valeur dans  $H^\bullet$  (sans quotient), et coïncide donc avec  $\mu_3$ . Pour appliquer la définition du produit de Massey (ou de  $\mu_3$ ) il nous faut savoir de quelle cochaîne  $\varphi_{xy}$  le produit  $x \cup y$  est le bord.

On rappelle que l'on peut représenter  $x$  et  $y$  par des surfaces  $S_x$  et  $S_y$  séparées dans des ouverts  $U$  et  $V$ .

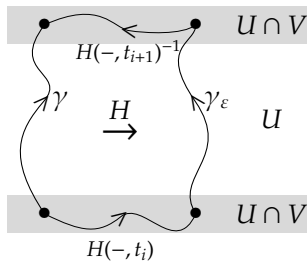
#### 3.2.1 Calcul de $\varphi_{xy}$

**Proposition 19.** *On peut définir une application  $\psi$  qui à un chemin de  $X$  associe le mot dans  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  de ses passages (orientés) à travers  $S_x$  et  $S_y$ . C'est à dire que pour un chemin  $1_x$  faisant un tour suivant  $x$  (ou  $1_y$  faisant un tour suivant  $y$ ) on a  $\psi(1_x) = m_x$  (et  $\psi(1_y) = m_y$ ), que  $\psi$  est un morphisme pour la concaténation et qu'il est invariant par homotopie.*

*Preuve :* On rappelle que le produit libre  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  est l'ensemble des mots en  $m_x$  et  $m_y$  où l'on supprime les occurrences de  $m_x \cdot m_x^{-1}$ ,  $m_x^{-1} \cdot m_x$ ,  $m_y \cdot m_y^{-1}$  et  $m_y^{-1} \cdot m_y$ , muni du produit de la concaténation.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Les surfaces  $S_x$  et  $S_y$  étant séparées dans des ouverts  $U$  et  $V$ , et  $[0, 1]$  étant compact, on peut le découper en un nombre fini d'intervalles  $[0 = t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n = 1]$  chacun d'image incluse dans  $U$  ou dans  $V$ . Ainsi,  $\gamma$  passe un nombre fini de fois de  $S_x$  à  $S_y$ . Sur chacun de ces intervalles on peut définir  $\psi(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = x(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$  si l'intervalle est à image dans  $U$  et  $y(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$  s'il est à image dans  $V$ . Donc  $\psi(\gamma) = x(\gamma|_{[t_0, t_1]}) \cdot y(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \cdot x(\gamma|_{[t_2, t_3]}) \cdot y(\gamma|_{[t_3, t_4]}) \cdot \dots \cdot x(\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}) \cdot y(\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]})$ , sachant que pour chaque intervalle un des deux termes est nul. Décrit sous cette forme, il est naturel que  $\psi(\gamma)$  ne dépende pas de la subdivision choisie et que  $\psi$  soit un morphisme pour la concaténation.

On peut choisir une subdivision qui alterne les inclusions dans  $U$  et  $V$  en fusionnant les intervalles successifs d'images incluses dans le même ouvert. Ainsi chaque point  $t_i$  (sauf 0 et 1) est d'image dans  $U \cap V$ . Soit  $H$  une homotopie entre  $\gamma$  et un autre chemin  $\delta$ . Les intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  et les points  $t_i$  étant compacts d'image incluse dans un ouvert ( $U$  ou  $V$  et  $U \cap V$ ), il existe, par continuité de  $H$  un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall s < \varepsilon, H(s, [t_i, t_{i+1}]) \subset U$  ou  $V$  et  $H(s, t_i) \in U \cap V$ . Localement autour de chaque chemin, on peut donc garder la même subdivision, qui vérifie toujours une alternance entre  $U$  et  $V$ .

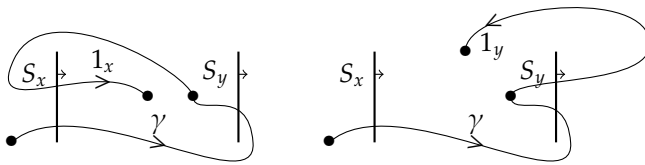


On étudie maintenant  $\gamma_\varepsilon = H(\varepsilon, -)$ . Sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $\gamma_\varepsilon|_{[t_i, t_{i+1}]}$  est presque homotope à  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ , c'est à dire qu'il lui est homotope par une homotopie qui ne conserve pas strictement les extrémités, mais les laisse dans  $U \cap V$ . On a en fait que  $H(-, t_i) \cdot \gamma_\varepsilon|_{[t_i, t_{i+1}]} \cdot H(-, t_{i+1})^{-1}$  est homotope à  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  donc a la même image sous  $x$  et  $y$ .

$H(-, t_i)$  étant à valeur dans  $U \cap V$ , sa contribution à  $x$  et  $y$  est nulle.

Ainsi  $\psi(\gamma_\varepsilon) = x(\gamma_\varepsilon|_{[t_0, t_1]}) \cdot y(\gamma_\varepsilon|_{[t_1, t_2]}) \cdot \dots \cdot x(\gamma_\varepsilon|_{[t_{n-1}, t_n]}) \cdot y(\gamma_\varepsilon|_{[t_n, t_{n+1}]}) = x(\gamma|_{[t_0, t_1]}) \cdot y(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \cdot \dots \cdot x(\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}) \cdot y(\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]}) = \psi(\gamma)$ . De ce fait, le morphisme  $\psi$  est localement constant sur une homotopie, donc constant.  $\square$

On souhaite écrire  $\varphi_{xy}(\gamma)$  comme ne dépendant que de  $\psi(\gamma)$ , c'est à dire factoriser  $\varphi_{xy} = f \circ \psi$ . Étant donné un lacet  $\gamma$ , on peut l'étendre en  $\gamma \cdot 1_x$  ou en  $\gamma \cdot 1_y$  en lui concaténant un lacet qui fait un tour suivant  $x$  ou un tour suivant  $y$ .

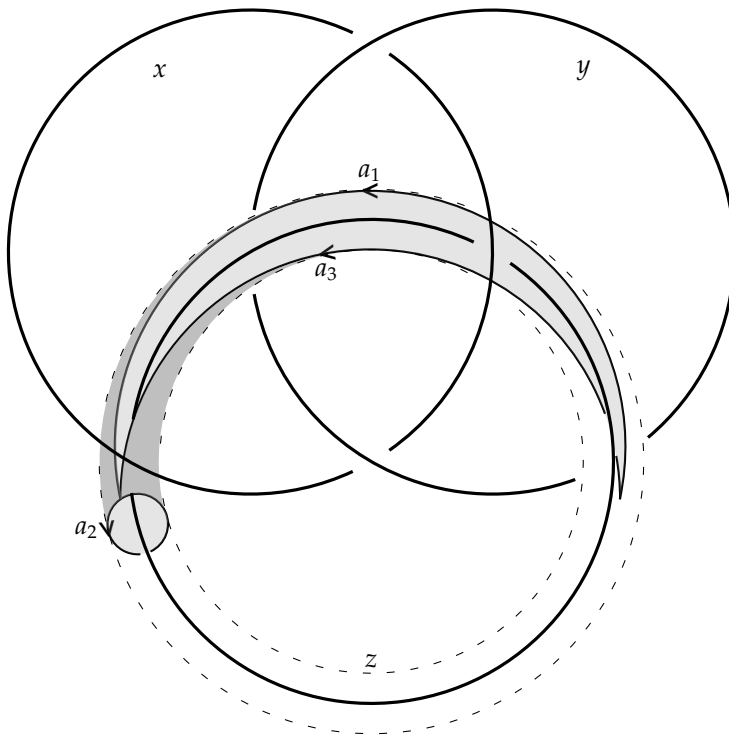


Les triangles écrasés sur ces lacets, de bords  $\gamma + 1_x - \gamma \cdot 1_x$  et  $\gamma + 1_y - \gamma \cdot 1_y$  donnent les relations  $f(\psi(\gamma)) + f(m_x) - f(\psi(\gamma) \cdot m_x) = x(\gamma) \times y(1_x)$  et  $f(\psi(\gamma)) + f(m_y) - f(\psi(\gamma) \cdot m_y) = x(\gamma) \times y(1_y)$ .

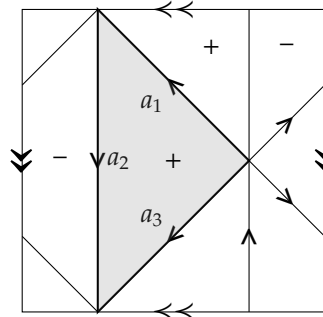
En supposant que  $f(m_x) = f(m_y) = 0$ , on obtient  $f(\psi(\gamma) \cdot m_x) = f(\gamma)$  et  $f(\psi(\gamma) \cdot m_y) = f(\psi(\gamma)) - x(\gamma)$ . Soit  $f(m_x^{k_1} m_y^{l_1} \dots m_x^{k_n} m_y^{l_n}) = -(l_1 \times k_1 + l_2 \times (k_1 + k_2) + \dots + l_n \times (k_1 + \dots + k_n))$ . On remarque ici que l'ajout d'un terme  $m_x \cdot m_x^{-1}$ ,  $m_x^{-1} \cdot m_x$ ,  $m_y \cdot m_y^{-1}$  ou  $m_y^{-1} \cdot m_y$  ne change rien au calcul de  $f$  qui est donc bien définie sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Il nous reste à vérifier que  $f(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha \cdot \beta) = x(\alpha) \times y(\beta)$  (où  $x(\alpha)$  est le nombre total de  $m_x$  dans  $\alpha$ ) et en effet dans le calcul de  $f(\alpha \cdot \beta)$  on commence par calculer  $f(\alpha)$  puis on calcule  $f(\beta)$  mais en oubliant les  $k_1 + \dots + k_n$  qui étaient dans  $\alpha$  pour chaque  $l_i$ , soit au total on a oublié  $(k_1 + \dots + k_n) \times (l_{n+1} + \dots + l_{n+m}) = x(\alpha) \times y(\beta)$ . La cochaîne  $\varphi_{xy}$  ainsi définie est bien de bord  $x \cup y$ .

### 3.2.2 Non trivialité de $m_3(x, y, z)$

Pour prouver la non trivialité d'un cocycle de dimension 2, le plus simple est de trouver une surface sans bords sur laquelle il ne s'annule pas. On étudie la construction suivante :



Ce triangle peut être complété en une triangulation du tore  $T_z$ , entourant le cercle  $z$ , de la façon suivante :



On rappelle que les orientations des arêtes vont dans l'ordre croissant de numérotation des sommets, donc l'ordre de ces derniers est déterminé par les premières. C'est pourquoi on a pas explicité directement les numérotation des sommets pour chaque triangle dans la triangulation mais seulement l'orientation des arêtes. On observe que l'orientation des arêtes coïncide pour les deux triangles la partageant, cependant le signe qui leur est donné en appliquant  $d$  aux triangles (qui sont des chaînes) est opposé (en tenant compte des signes assignés aux triangles sur la figure), ce qui signifie plus simplement que la chaîne  $T_z$  est de bord nul.

**Proposition 20.**  $m_3(x, y, z) \cdot T_z \neq 0$  donc  $m_3(x, y, z)$  est non trivial dans  $H^*(B)$ .

*Preuve* : On rappelle que  $m_3(x, y, z) = \varphi_{xy} \cup z - x \cup \varphi_{yz}$ .

Le triangle  $T$  représenté ci-dessus en gris, de bord  $a_1 + a_2 - a_3$  a une valeur non nulle sous  $\varphi_{xy} \cup z$  car  $\psi(a_1) = m_y m_x^{-1} m_y^{-1} m_x$  donc  $\varphi_{xy}(a_1) = 1$  et  $z(a_2) = -1$ . Le triangle ayant deux arêtes en commun avec  $T$  (qui le complète en un tube) a une valeur nulle sous le produit  $\cup$  considéré puisque sa première arête fait un tour suivant  $z$  et est donc de valeur nulle sous  $\varphi_{xy}$ . Les deux autres triangles complétant le tore ne traversent ni  $x$  ni  $y$  donc donnent des valeurs nulles aussi. Enfin, chacun des quatre triangles est de valeur nulle sous  $x \cup \varphi_{yz}$  car aucun tour non trivial suivant  $x$  n'est réalisé par une arête (les arêtes traversant  $x$  dans un sens le retraversent dans l'autre ensuite donc elles sont toutes de valeur nulle sous  $x$ ). Ainsi, même si on ne connaît pas explicitement  $\varphi_{yz}$ , on sait que ce terme apporte une contribution nulle. On a donc  $m_3(x, y, z) \cdot T_z = -1$ . Comme  $dT_z = 0$ , si  $m_3(x, y, z)$  était un bord  $\delta\psi$  on aurait nécessairement  $m_3(x, y, z) \cdot T_z = \psi \cdot dT_z = 0$ .  $\square$

### 3.2.3 Trivialité de $m_3(X, Y, Z)$

C'est une fois de plus un argument de petites chaînes qui va nous servir ici. On peut représenter les trois générateurs de  $H^1(B')$  par trois surfaces orientées disjointes (ce qui n'est pas possible pour les anneaux Borroméens) et on peut en séparer une des deux autres dans deux ouverts ( $S_x \subset U \setminus V$  et  $S_y, S_z \subset V \setminus U$ ). On peut donc faire les constructions précédentes pour obtenir  $\varphi_{XY}$  et  $\varphi_{YZ}$  (toutes les deux bien définies en même temps, ce qui n'est pas possible pour les anneaux Borroméens) et calculer  $m_3(X, Y, Z)$  sur des chaînes contenues dans  $U$  ou dans  $V$ . Par définition  $m_3(X, Y, Z) = \varphi_{XY} \cup Z - X \cup \varphi_{YZ}$ , mais, dans  $U$ ,  $\varphi_{YZ}$  et  $Z$  sont nuls donc  $m_3$  l'est aussi et, dans  $V$ ,  $\varphi_{XY}$  et  $X$  sont nuls donc  $m_3$  aussi. Le produit de Massey  $m_3(X, Y, Z)$  étant nul sur les petites chaînes, il est nul dans  $H^*(B')$ .

**Ainsi, le produit de Massey appliqué aux trois générateurs du premier groupe de cohomologie est trivial pour les trois anneaux non entrelacés et non trivial pour les anneaux Borroméens. Le produit de Massey distingue donc ces deux espaces, que ne distinguaient pas les groupes de cohomologie munis du produit  $\cup$ . Ils ne sont donc pas de même type d'homotopie.**

## Références

- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Ler17] C. Leruste, *Topologie algébrique. Une introduction, et au delà*, Calvage & Mounet.
- [LV12] J.-L. Loday et B. Vallette, *Algebraic operads*, Springer, Vol. 346, 2012.
- [Mas58] W. Massey, *Some higher order cohomology operations*, Symposium internacional de topologia algebraica (International symposium on algebraic topology), pp. 145-154
- [May72] May J. P., *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures Notes in Mathematics 271 (1972). Springer-Verlag Berlin
- [Sta63] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc., 108, 1963.
- [Val14] B. Vallette, *Algebra + Homotopy = Operad*, Symplectic, Poisson and Noncommutative Geometry, MSRI Publications 62 (2014), 101-162.