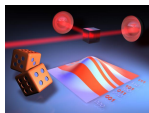


Marches quantiques ouvertes

Hugo BRINGUIER

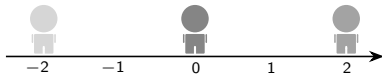
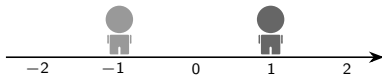
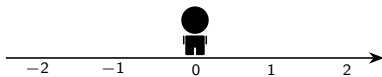
sous la direction de Patrick Cattiaux et de Clément Pellegrini

13 Juin 2018



A.N.R. StoQ
ANR-14-CE25-0003







H. Binguier.

Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks.

[Annales Henri Poincaré, 18\(10\) :3167–3192, 2017.](#)



I. Bardet, H. Binguier, C. Pellegrini, and Y. Pautrat.

Recurrence and transience of continuous time open quantum walks.

[To be submitted to Annales de l'institut Henri Poincaré : Probability and Statistics.](#)



I. Bardet, H. Binguier, C. Pellegrini, and Y. Pautrat.

Potential theory for continuous time open quantum walks.

[Work in progress.](#)

1 Présentation des modèles

- Marches quantiques ouvertes à temps discret
- Marches quantiques ouvertes à temps continu

2 Résultats

- Irréductibilité
- Récurrence - Transience
- Théorème central limite
- Principe de grandes déviations

3 Perspectives

- Loi des temps d'atteinte

Présentation des modèles

1 Présentation des modèles

- Marches quantiques ouvertes à temps discret
- Marches quantiques ouvertes à temps continu

2 Résultats

- Irréductibilité
- Récurrence - Transience
- Théorème central limite
- Principe de grandes déviations

3 Perspectives

- Loi des temps d'atteinte

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Soient V un graphe, $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \in V} \mathcal{H}_i \otimes |i\rangle$ (\mathcal{H}_i espaces de Hilbert) et

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in V} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Soient V un graphe, $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \in V} \mathcal{H}_i \otimes |i\rangle$ (\mathcal{H}_i espaces de Hilbert) et

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in V} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

On pose \mathcal{M} l'application complètement positive telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu \mapsto \sum_{i,j \in V} C_i^j \mu C_i^{j*} \end{array}}$$

où $C_i^j = A_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ avec $A_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que $\sum_{i,j \in V} \|C_i^{j*} C_i^j\| < \infty$.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Soient V un graphe, $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \in V} \mathcal{H}_i \otimes |i\rangle$ (\mathcal{H}_i espaces de Hilbert) et

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in V} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

On pose \mathcal{M} l'application complètement positive telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu \mapsto \sum_{i,j \in V} C_i^{j*} \mu C_i^j \end{array}}$$

où $C_i^j = A_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ avec $A_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que $\sum_{i,j \in V} \|C_i^{j*} C_i^j\| < \infty$.

$$\mathcal{M} \text{ préserve la trace} \iff \sum_{i,j \in V} C_i^{j*} C_i^j = I_{\mathcal{K}} \iff \forall i \in V, \sum_{j \in V} A_i^{j*} A_i^j = I_{\mathcal{H}_i}$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Marche quantique ouverte [Attal, Petruccione, Sabot, Sinayskiy 2012]

Soit $\mu \in \mathcal{D}$ alors $\mathcal{M}^n(\mu) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \rho^{(n)}(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$ de sorte que

$$\rho^{(n+1)}(i) = \sum_{j \in \mathcal{V}} A_j^i \rho^{(n)}(j) A_j^{i*} .$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Marche quantique ouverte [Attal, Petruccione, Sabot, Sinayskiy 2012]

Soit $\mu \in \mathcal{D}$ alors $\mathcal{M}^n(\mu) = \sum_{i \in V} \rho^{(n)}(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$ de sorte que

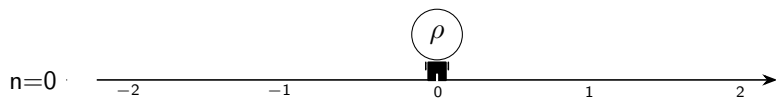
$$\rho^{(n+1)}(i) = \sum_{j \in V} A_j^i \rho^{(n)}(j) A_j^{i*} .$$

La mesure (sur \mathbb{C}^V) définit une variable aléatoire Q_n sur V telle que :

$$\mathbb{P}(Q_n = i) = \text{Tr}(\rho^{(n)}(i))$$

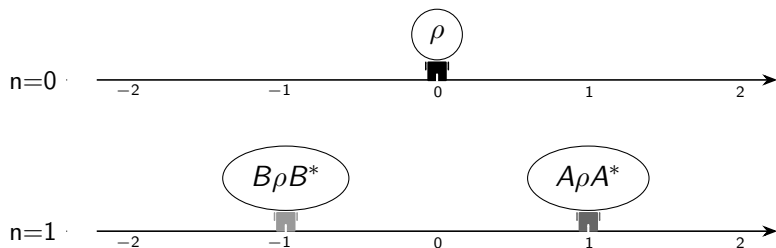
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



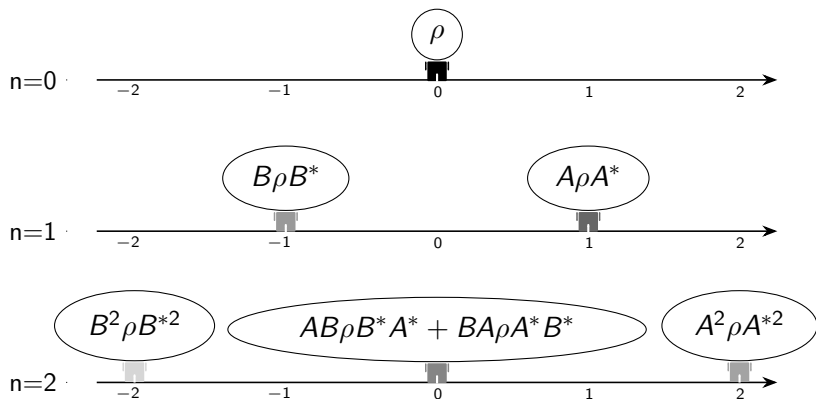
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



Présentation des modèles

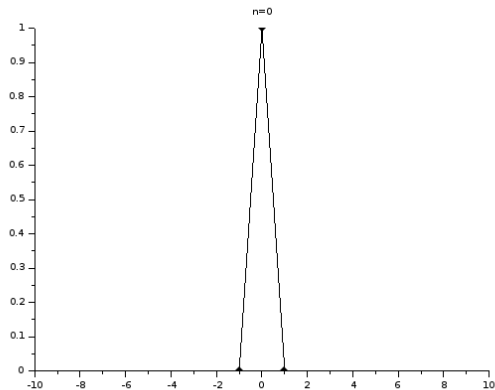
Marches quantiques ouvertes à temps discret



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Distribution de Q_0

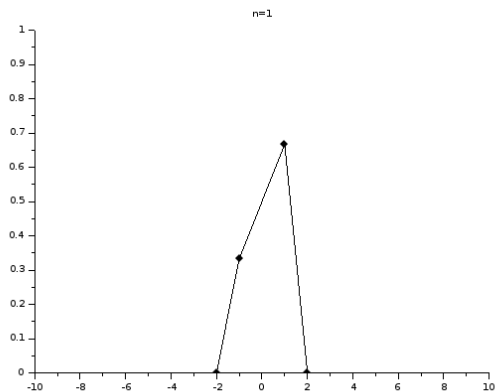


$$\mu = \rho \otimes |0\rangle\langle 0|$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Distribution de Q_1

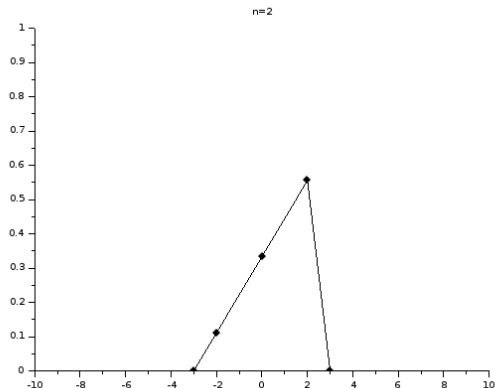


$$\mathcal{M}(\mu) = B\rho B^* \otimes |-1\rangle\langle -1| + A\rho A^* \otimes |1\rangle\langle 1|$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Distribution de Q_2

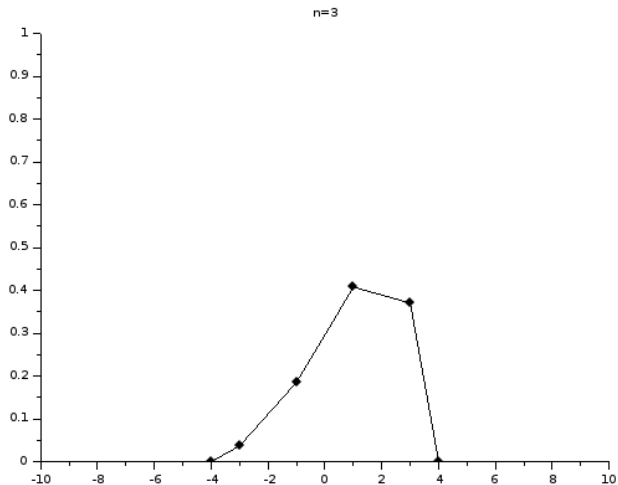


$$\mathcal{M}^2(\mu) = B^2 \rho B^{*2} \otimes |-2\rangle\langle -2| + (AB\rho B^* A^* + BA\rho A^* B^*) \otimes |0\rangle\langle 0| + \dots$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

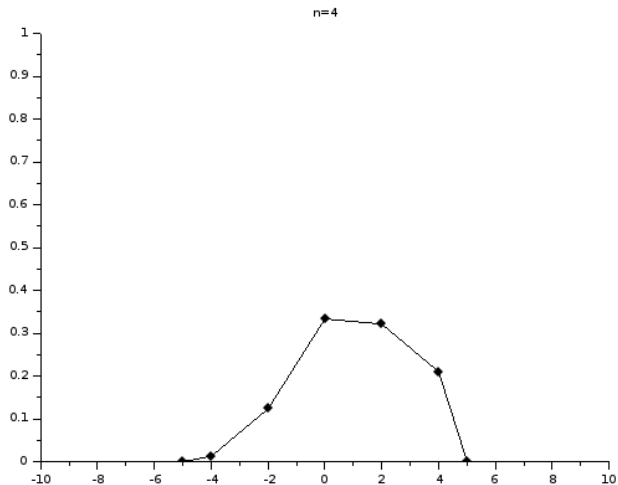
Distribution de Q_3



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

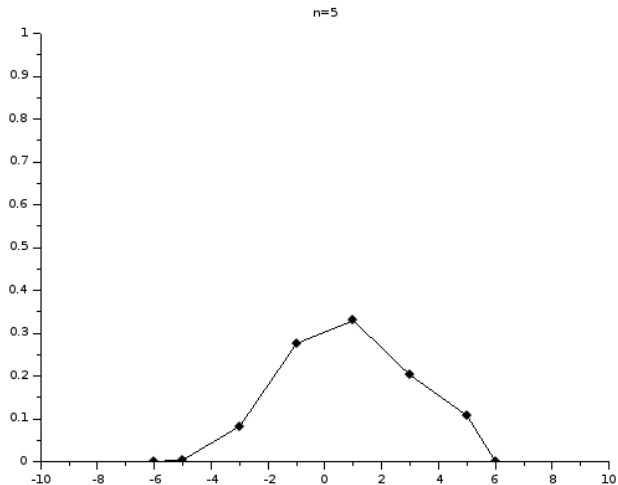
Distribution de Q_4



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

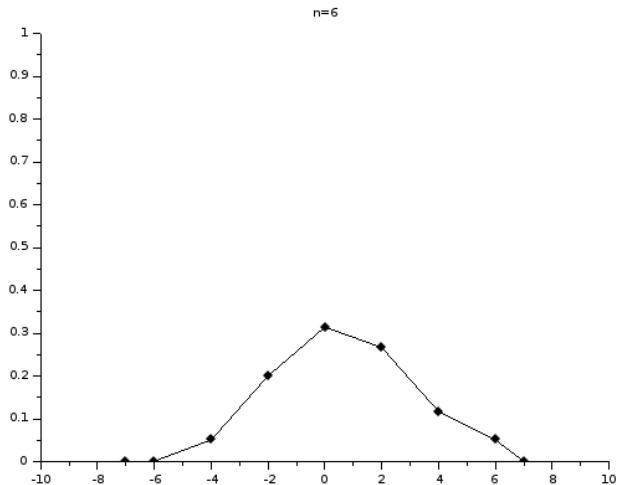
Distribution de Q_5



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

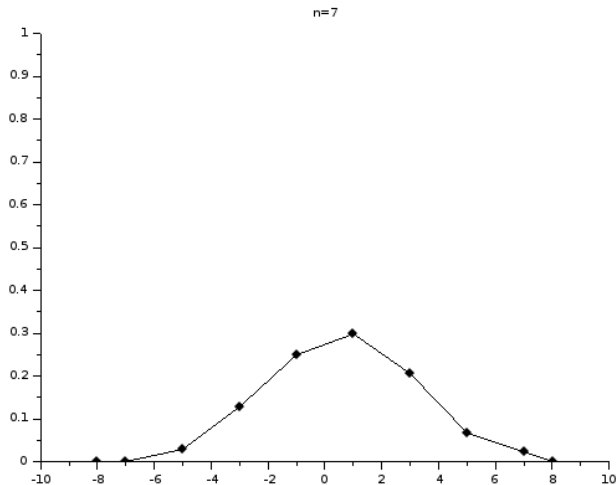
Distribution de Q_6



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

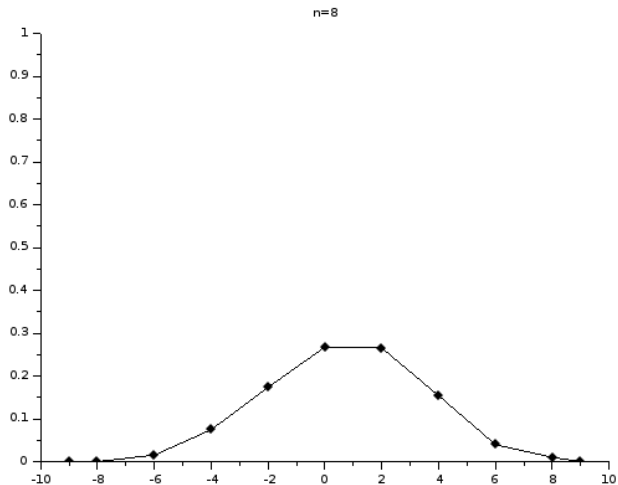
Distribution de Q_7



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

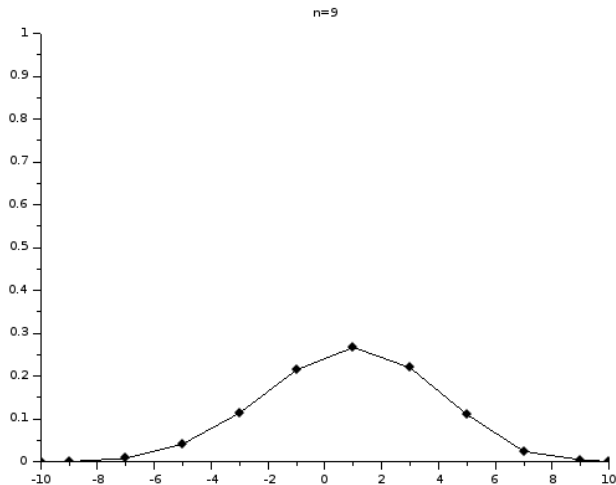
Distribution de Q_8



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Distribution de Q_9



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Trajectoires quantiques [Attal, Petruccione, Sabot, Sinayskiy 2012]

En mesurant la position du marcheur à chaque étape, on obtient une chaîne de Markov $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathcal{D} de sorte que si $\omega^{(n)} = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$, alors :

$$\omega^{(n+1)} = \frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}) \text{ où } j \in V.$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Trajectoires quantiques [Attal, Petruccione, Sabot, Sinayskiy 2012]

En mesurant la position du marcheur à chaque étape, on obtient une chaîne de Markov $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathcal{D} de sorte que si $\omega^{(n)} = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$, alors :

$$\omega^{(n+1)} = \frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}) \text{ où } j \in V.$$

On pose $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que $\omega_n = \rho_n \otimes |X_n\rangle\langle X_n|$.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Trajectoires quantiques [Attal, Petruccione, Sabot, Sinayskiy 2012]

En mesurant la position du marcheur à chaque étape, on obtient une chaîne de Markov $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathcal{D} de sorte que si $\omega^{(n)} = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$, alors :

$$\omega^{(n+1)} = \frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}) \text{ où } j \in V.$$

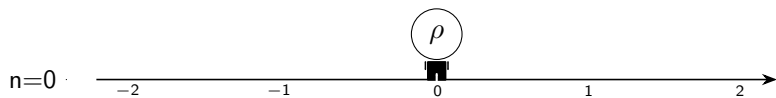
On pose $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que $\omega_n = \rho_n \otimes |X_n\rangle\langle X_n|$.

Lien entre marches et trajectoires quantiques

Pour n fixé, $Q_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_n$.

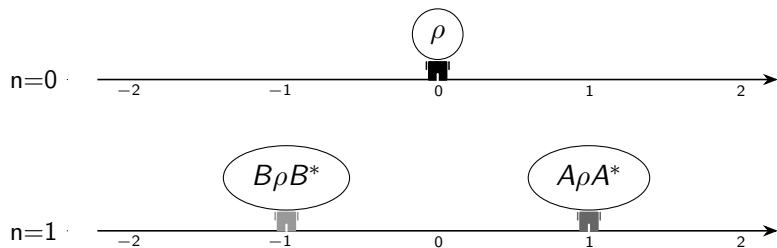
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



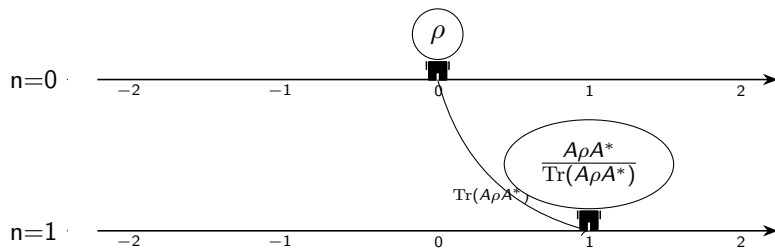
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



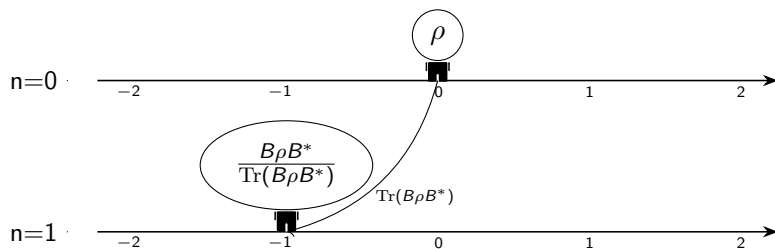
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



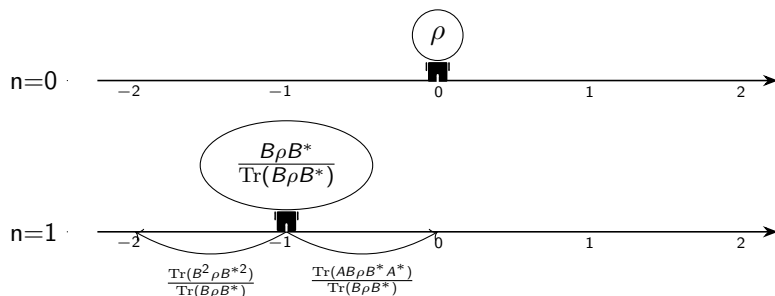
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



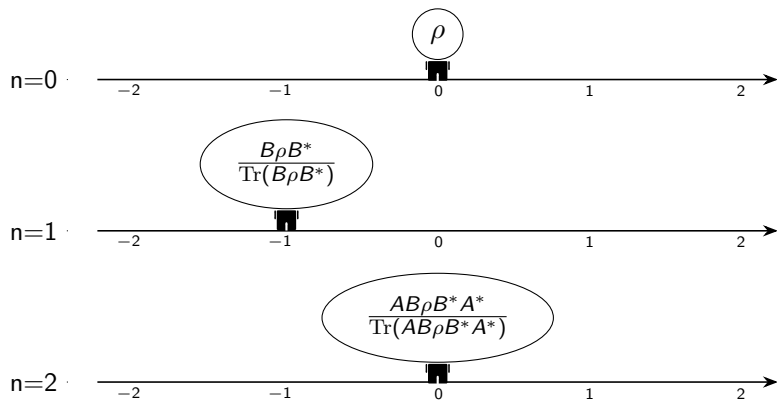
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



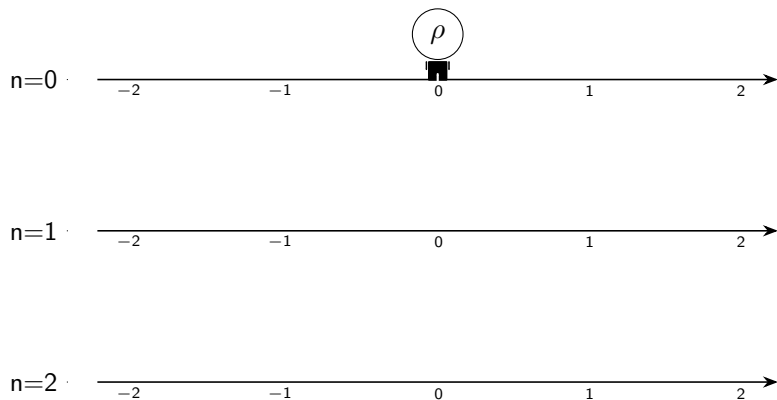
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



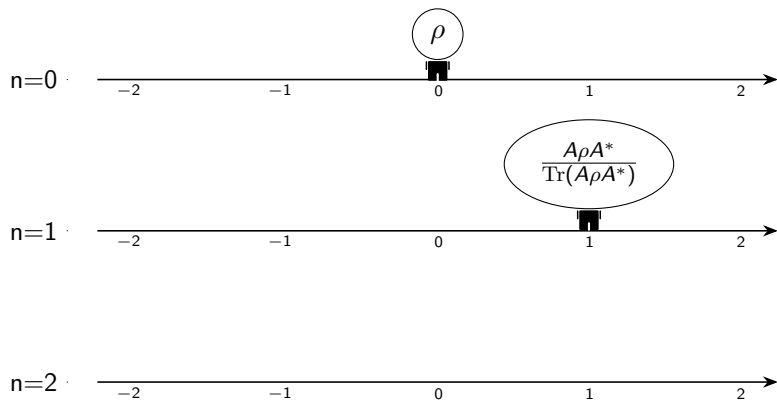
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



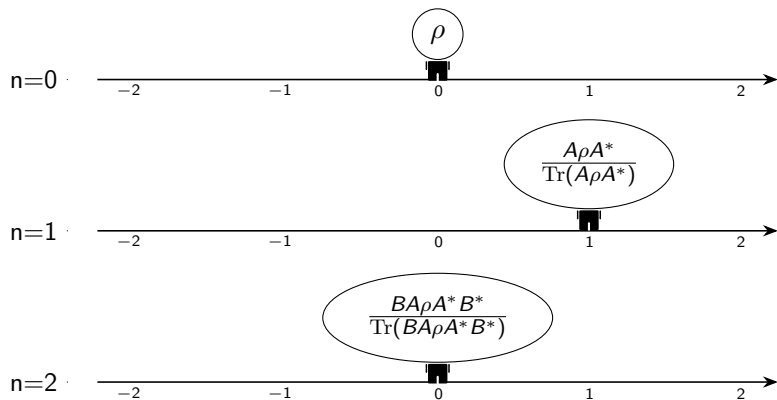
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret



Présentation des modèles

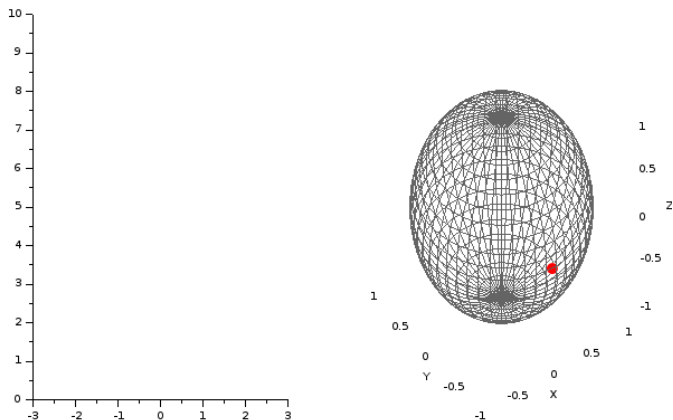
Marches quantiques ouvertes à temps discret



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

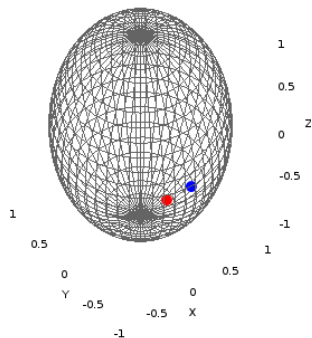
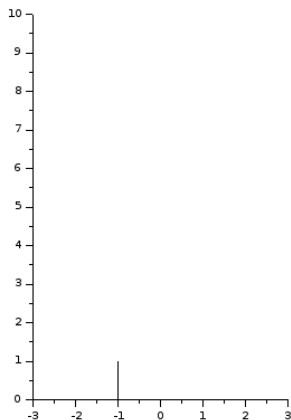
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

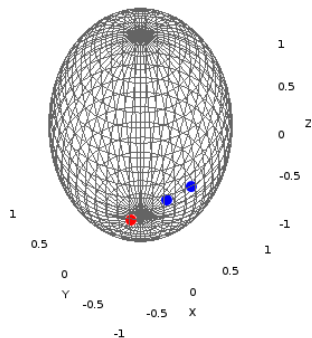
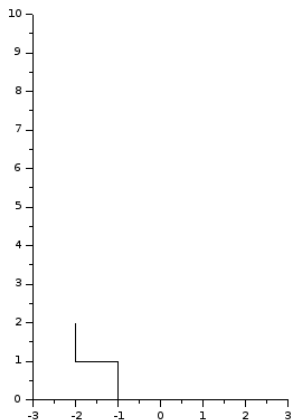
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

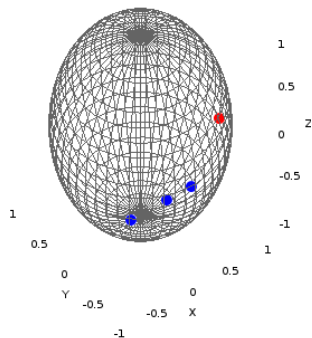
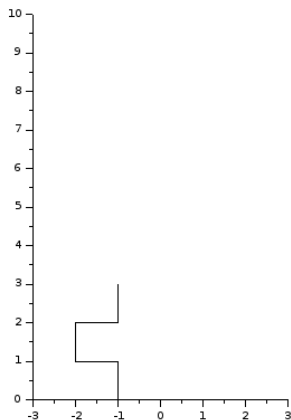
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

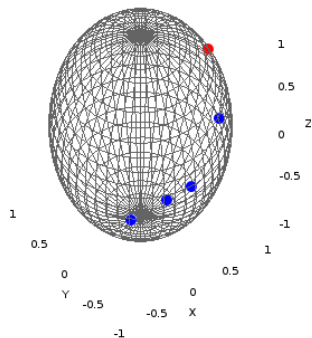
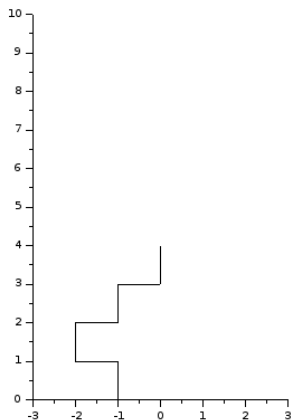
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

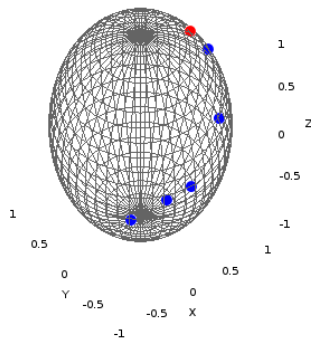
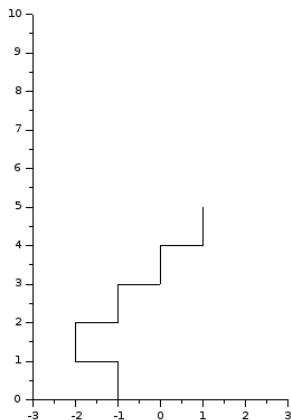
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

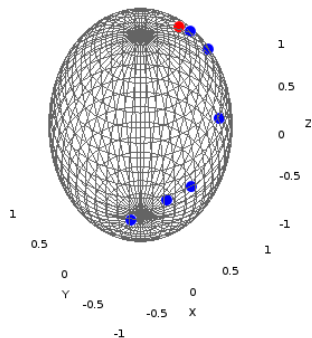
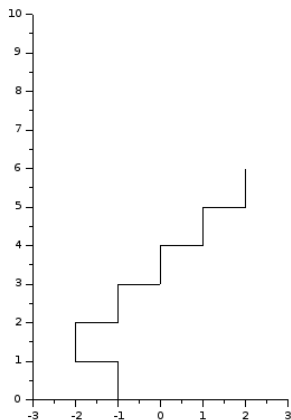
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

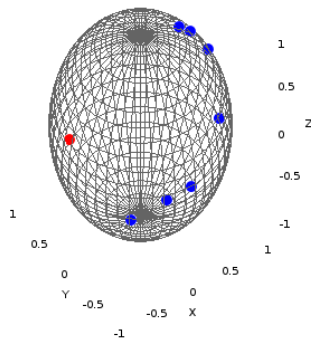
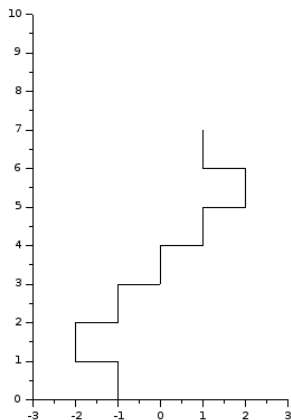
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

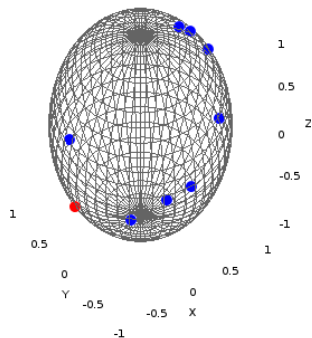
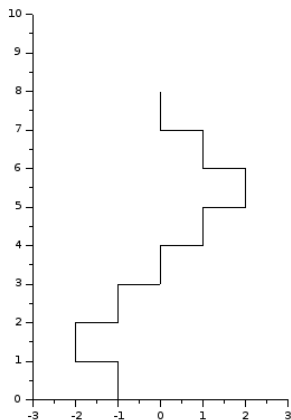
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

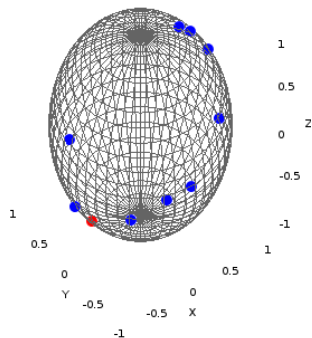
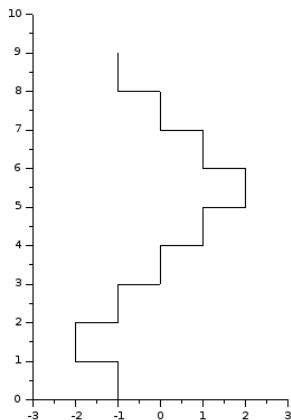
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

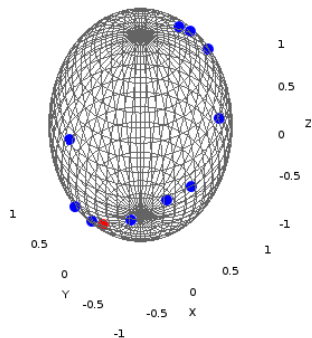
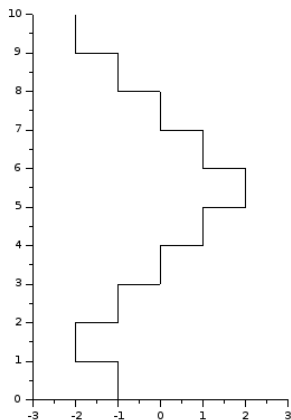
Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_n)_n$ à gauche et $(\rho_n)_n$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps discret

 S. Attal, N. Guillotin-Plantard, and C. Sabot.

Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records.

Ann. Henri Poincaré, 16(1) :15–43, 2015.

 R. Carbone and Y. Pautrat.

Homogeneous open quantum random walks on a lattice.

J. Stat. Phys., 160(5) :1125–1153, 2015.

 R. Carbone and Y. Pautrat.

Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties.

Ann. Henri Poincaré, 17(1) :99–135, 2016.

 I. Bardet, D. Bernard, and Y. Pautrat.

Passage times, exit times and dirichlet problems for open quantum walks.

J. Stat. Phys., 167(2) :173–204, 2017.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

On pose l'opérateur de Lindblad suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto -i[\mathbf{H}, \mu] + \sum_{i,j \in \mathcal{V}} \left(S_i^j \mu S_i^{j*} - \frac{1}{2} \{S_i^{j*} S_i^j, \mu\} \right) \end{aligned}$$

- $\mathbf{H} = \sum_{i \in \mathcal{V}} H_i \otimes |i\rangle\langle i|$ avec $H_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ auto-adjoints ;
- $S_i^j = R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ avec $R_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que $\sum_{i,j \in \mathcal{V}} \|S_i^{j*} S_i^j\| < \infty$.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

En posant $G = -iH - \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} S_i^{j*} S_i^j$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto G\mu + \mu G^* + \sum_{i,j \in V} S_i^j \mu S_i^{j*} \end{aligned}$$

- $G = \sum_{i \in V} G_i \otimes |i\rangle\langle i|$ avec $G_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$;
- $S_i^j = R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ avec $R_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que $\sum_{i,j \in V} \|S_i^{j*} S_i^j\| < \infty$.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

En posant $G = -iH - \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} S_i^{j*} S_i^j$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto G\mu + \mu G^* + \sum_{i,j \in V} S_i^j \mu S_i^{j*} \end{aligned}$$

- $G = \sum_{i \in V} G_i \otimes |i\rangle\langle i|$ avec $G_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$;
- $S_i^j = R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ avec $R_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que $\sum_{i,j \in V} \|S_i^{j*} S_i^j\| < \infty$.

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \operatorname{Tr}(\mathcal{L}(\mu)) = 0 &\iff G + G^* + \sum_{i,j \in V} S_i^{j*} S_i^j = O_{\mathcal{K}} \\ &\iff \forall i \in V, G_i + G_i^* + \sum_{j \in V} R_i^{j*} R_i^j = O_{\mathcal{H}_i} \end{aligned}$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Marches quantiques ouvertes à temps continu [Pellegrini 2014]

L'équation $\frac{d}{dt}\mu^{(t)} = \mathcal{L}(\mu^{(t)})$ avec condition initiale $\mu \in \mathcal{D}$ admet une unique solution $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{D} .

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Marches quantiques ouvertes à temps continu [Pellegrini 2014]

L'équation $\frac{d}{dt}\mu^{(t)} = \mathcal{L}(\mu^{(t)})$ avec condition initiale $\mu \in \mathcal{D}$ admet une unique solution $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{D} .

De plus, $\mu^{(t)} = \sum_{i \in V} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ de sorte que

$$\frac{d}{dt}\rho^{(t)}(i) = G_i\rho^{(t)}(i) + \rho^{(t)}(i)G_i^* + \sum_{j \in V} R_j^i\rho^{(t)}(j)R_j^{i*}.$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Marches quantiques ouvertes à temps continu [Pellegrini 2014]

L'équation $\frac{d}{dt}\mu^{(t)} = \mathcal{L}(\mu^{(t)})$ avec condition initiale $\mu \in \mathcal{D}$ admet une unique solution $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{D} .

De plus, $\mu^{(t)} = \sum_{i \in V} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ de sorte que

$$\frac{d}{dt}\rho^{(t)}(i) = G_i\rho^{(t)}(i) + \rho^{(t)}(i)G_i^* + \sum_{j \in V} R_j^i\rho^{(t)}(j)R_j^{i*}.$$

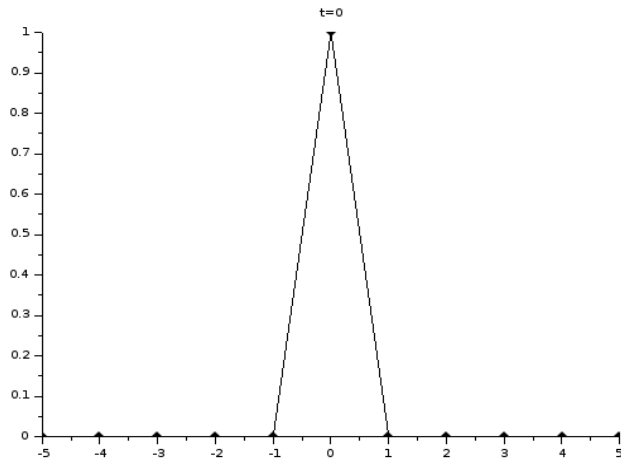
La mesure (sur \mathbb{C}^V) définit une variable aléatoire Q_t sur V telle que :

$$\mathbb{P}(Q_t = i) = \text{Tr}(\rho^{(t)}(i))$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Distribution de Q_t



Présentation des modèles

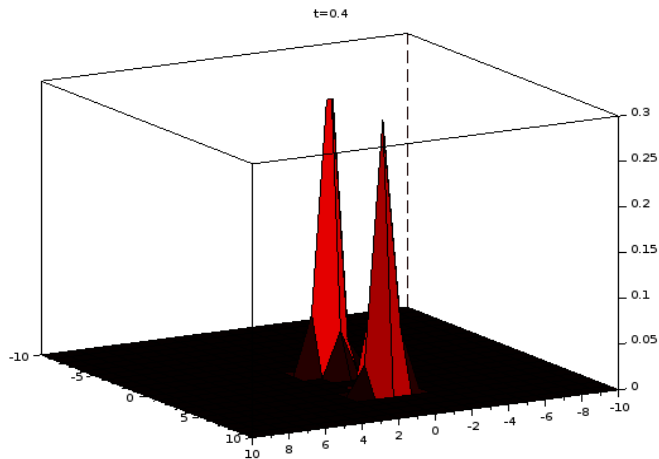
Marches quantiques ouvertes à temps continu

Distribution de Q_t

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Distribution de Q_t



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Distribution de Q_t

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Trajectoires quantiques [Pellegrini 2014]

Soit $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$, on définit $(\omega_t)_{t \geq 0}$ le processus de Markov tel que :

$$\omega_0 = \frac{\rho(i)}{\text{Tr}(\rho(i))} \otimes |i\rangle\langle i| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(\rho(i))$$

et

$$\begin{aligned} d\omega_s = & G\omega_{s-} + \omega_{s-}G^* - \omega_{s-}\text{Tr}(G\omega_{s-} + \omega_{s-}G^*) ds \\ & + \sum_{i,j \in V} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*}}{\text{Tr}(S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*})} - \omega_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds), \end{aligned}$$

- $(N^{ij})_{i,j \in V}$ processus ponctuels de Poisson indépendants sur \mathbb{R}^2 .

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Plus particulièrement, le processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est de la forme

$$\omega_t = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$$

où $X_t \in V$ et $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{X_t})$, tels que

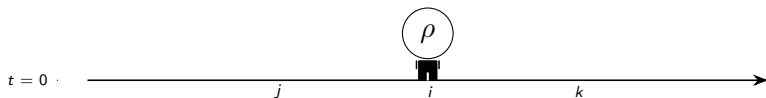
$$d\rho_s = \sum_{i \in V} \left(\mathcal{F}_i(\rho_{s-}) ds + \sum_{j \in V} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds) \right) \mathbb{1}_{X_{s-} = i},$$

$$dX_s = \sum_{i \in V} \left(\sum_{j \in V} \int_{\mathbb{R}} (j - i) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds) \right) \mathbb{1}_{X_{s-} = i}.$$

- $\mathcal{F}_i(\rho) = G_i \rho + \rho G_i^* - \rho \text{Tr}(G_i \rho + \rho G_i^*)$.
- $(N^{ij})_{i,j \in V}$ processus ponctuels de Poisson indépendants sur \mathbb{R}^2 .

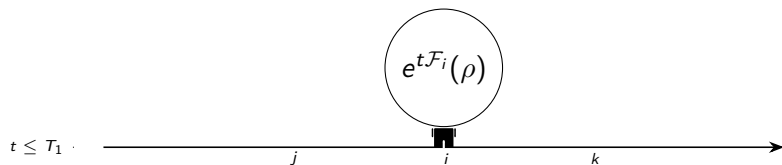
Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

$$\frac{R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i(\rho)} R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i(\rho)} R_i^{j*})}$$

$t = T_1$ · j i k

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

$$e^{t\mathcal{F}_j} \left(\frac{R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i}(\rho) R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i}(\rho) R_i^{j*})} \right)$$

$$T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$$

j

i

k

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

$t = T_1 + T_2$

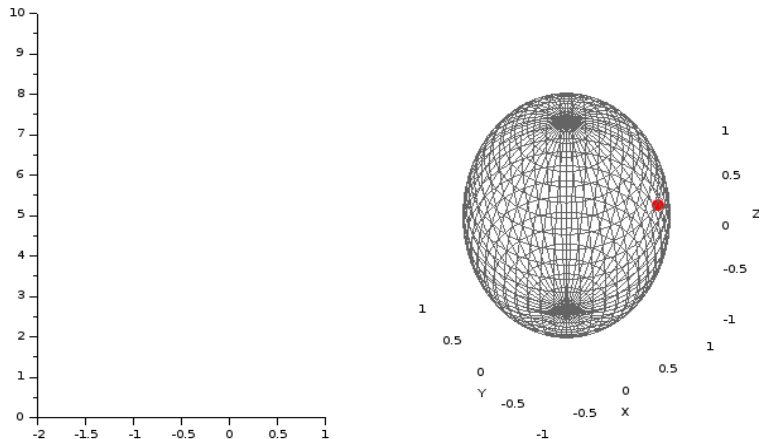
j i k

$$\frac{R_j^k e^{T_2 \mathcal{F}_j} (R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i} (\rho) R_i^{j*}) R_j^{k*}}{\text{Tr}(R_j^k e^{T_2 \mathcal{F}_j} (R_i^j e^{T_1 \mathcal{F}_i} (\rho) R_i^{j*}) R_j^{k*})}$$

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_t)_t$ à gauche et $(\rho_t)_t$ à droite.



Présentation des modèles

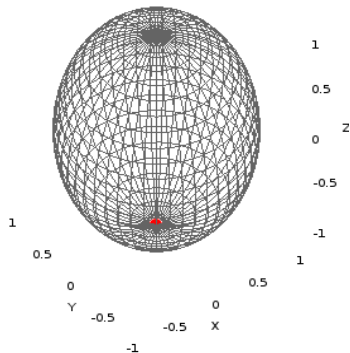
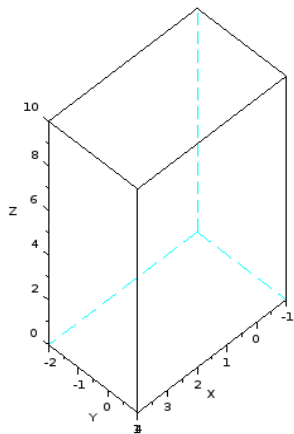
Marches quantiques ouvertes à temps continu

Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_t)_t$ à gauche et $(\rho_t)_t$ à droite.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_t)_t$ à gauche et $(\rho_t)_t$ à droite.



Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Simulation d'une trajectoire quantique : $(X_t)_t$ à gauche et $(\rho_t)_t$ à droite.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Lien entre marches et trajectoires quantiques

Pour t fixé, $Q_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t$.

Présentation des modèles

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Soient $(U_i^j)_{i,j \in V}$ unitaires. Posons

$$R_i^j = \sqrt{q_{ij}} U_i^j \text{ et } G_i = \frac{q_{ii}}{2} Id$$

Alors

$$G_i + G_i^* + \sum_{j \in V} R_i^{j*} R_i^j = O_{\mathcal{H}_i} \iff \sum_{j \in V} q_{ij} = 0$$

et, dans ce cas, $(X_t)_{t \geq 0}$ est **une chaîne de Markov classique** de matrice de taux de transition $(q_{ij})_{i,j \in V}$.

Résultats

1 Présentation des modèles

- Marches quantiques ouvertes à temps discret
- Marches quantiques ouvertes à temps continu

2 Résultats

- Irréductibilité
- Récurrence - Transience
- Théorème central limite
- Principe de grandes déviations

3 Perspectives

- Loi des temps d'atteinte

Définition

La marche quantique $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot) \right)_{t \geq 0}$

- ▶ est **irréductible** s'il existe t positif tel que $e^{t\mathcal{L}}$ n'admette aucune projection sous-harmonique non triviale i.e.

$$\exists t \geq 0, \forall P \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), P^2 = P, P^* = P,$$

$$e^{t\mathcal{L}}(P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P) \subset P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P \implies P = 0 \text{ ou } I.$$

Définition

La marche quantique $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$

- ▶ est **irréductible** s'il existe t positif tel que $e^{t\mathcal{L}}$ n'admette aucune projection sous-harmonique non triviale i.e.
 $\exists t \geq 0, \forall P \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), P^2 = P, P^* = P,$

$$e^{t\mathcal{L}}(P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P) \subset P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P \implies P = 0 \text{ ou } I.$$

- ▶ **améliore la positivité** s'il existe t tel que pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu \geq 0$, on a

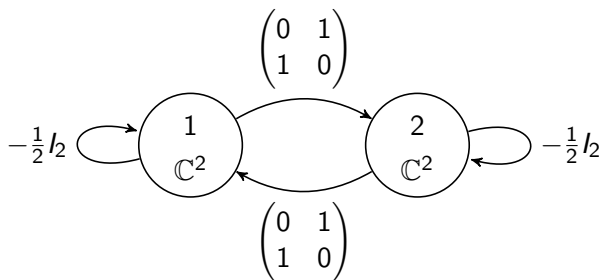
$$e^{t\mathcal{L}}(\mu) > 0.$$

Théorème [Bardet, B., Pautrat, Pellegrini 2018]

Les propositions suivantes sont équivalentes.

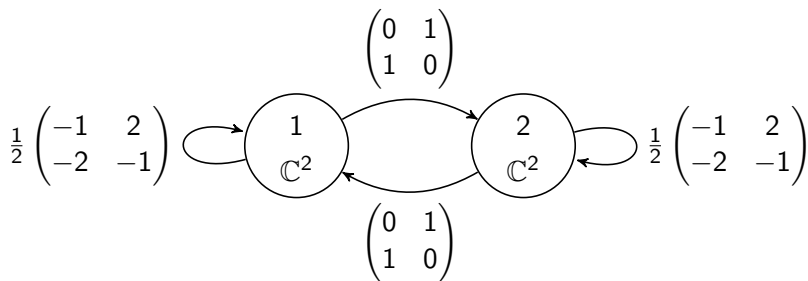
- \mathcal{T} est irréductible.
- \mathcal{T} améliore la positivité.
- Pour tout $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\mathbb{C}[G, S]\varphi$ est dense dans \mathcal{K} où $\mathbb{C}[G, S]$ est l'ensemble des polynômes en G et en S_i^j ($i, j \in V$).

Non irréductible



$$\text{Pour } \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle, \mathbb{C}[G, S]\varphi = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |2\rangle \right\} \neq \mathcal{K}.$$

Irréductible



Pour tout $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}[G, S]\varphi = \mathcal{K}$.

Résultats

Réurrence - Transience

Notons T_1 le premier temps de saut,

$$\tau_i = \inf\{t \geq T_1, |X_t = i\} \text{ et } n_i = \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_t=i} dt.$$

Résultats

Récurrence - Transience

Notons T_1 le premier temps de saut,

$$\tau_i = \inf\{t \geq T_1, |X_t = i\} \text{ et } n_i = \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_t=i} dt.$$

Théorème [Bardet, B., Pautrat, Pellegrini 2018]

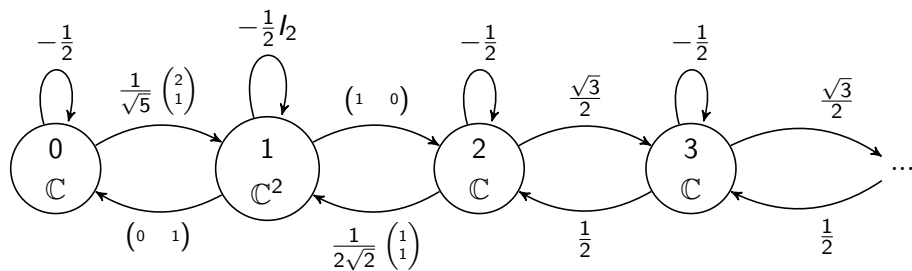
Soit $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot)\right)_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. Une (et une seule) de ces trois situations est réalisée :

- 1 $\forall i, j \in V, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i), \mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty$ et $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$;
- 2 $\forall i, j \in V, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i), \mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$ et $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) < 1$;
- 3 $\forall i, j \in V, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i), \mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$, mais il existe i dans V et ρ, ρ' dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ (ρ nécessairement non fidèle) tels que

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) < 1.$$

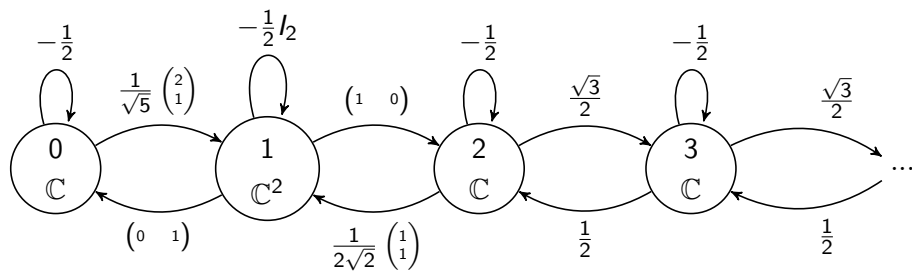
Résultats

Réurrence - Transience



Résultats

Réurrence - Transience



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$

0

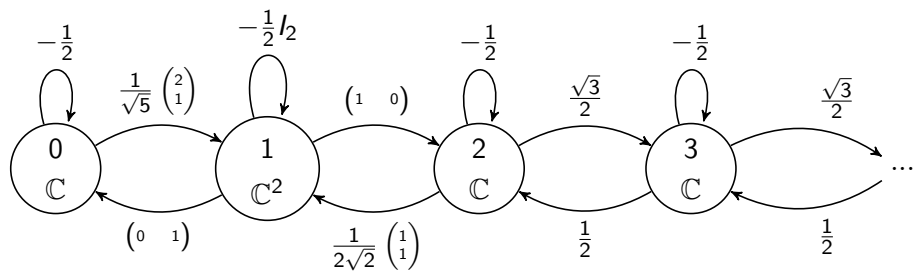
1

2

3

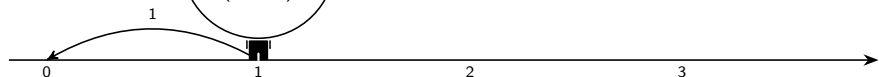
Résultats

Réurrence - Transience



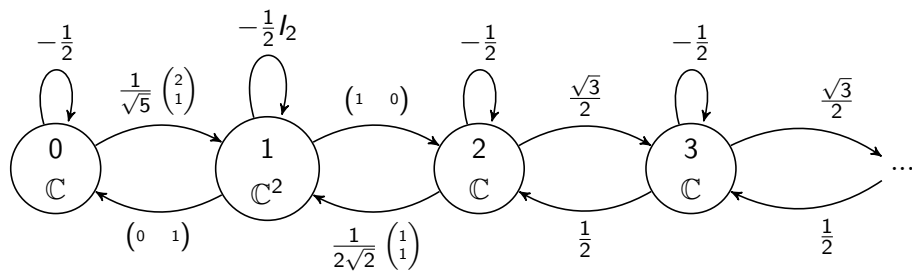
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$

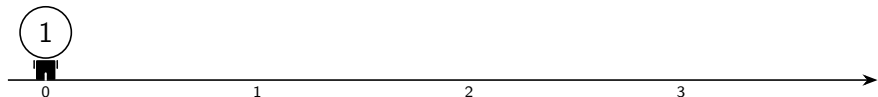


Résultats

Réurrence - Transience

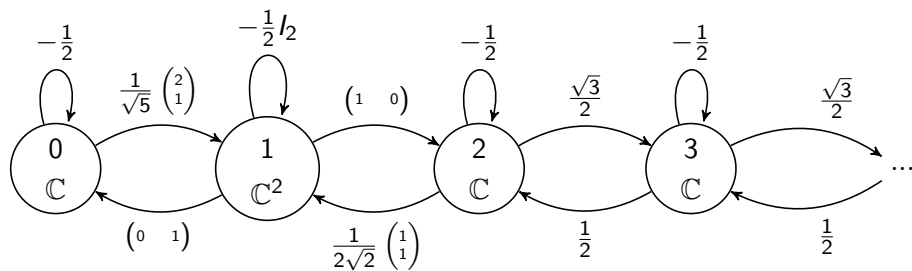


Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$

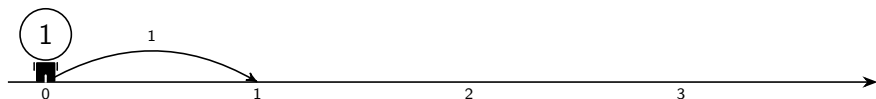


Résultats

Réurrence - Transience

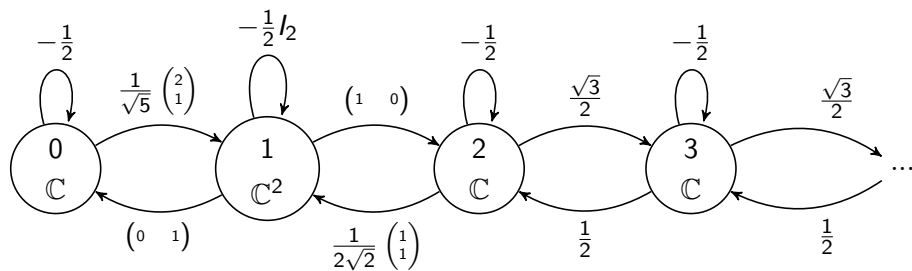


Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$



Résultats

Réurrence - Transience



$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$

0

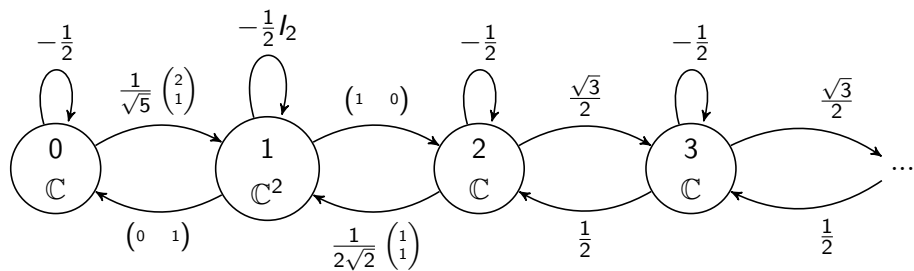
1

2

3

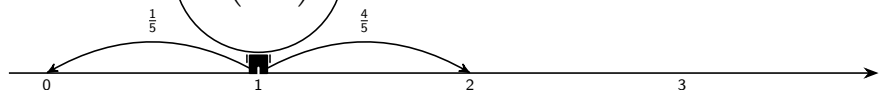
Résultats

Réurrence - Transience



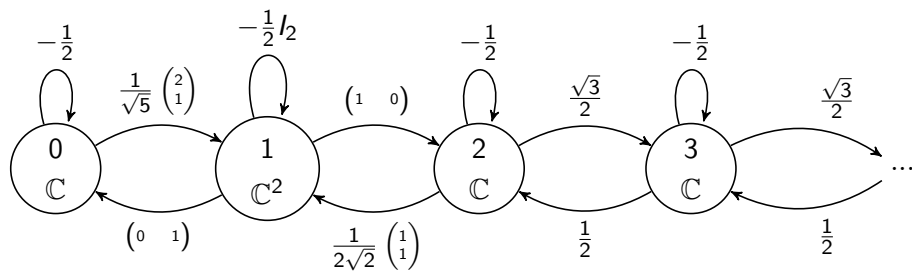
$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$



Résultats

Réurrence - Transience



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) < 1$

0

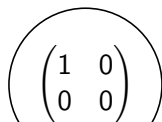
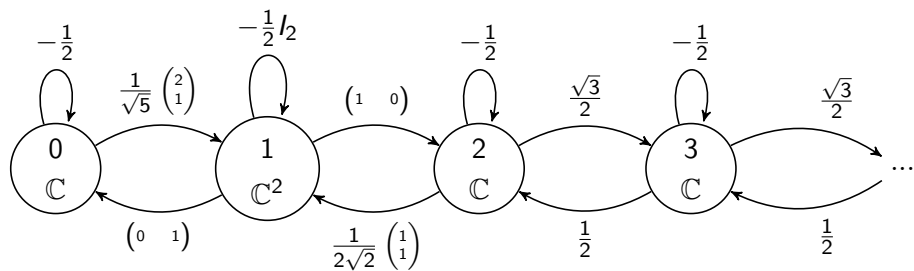
1

2

3

Résultats

Réurrence - Transience

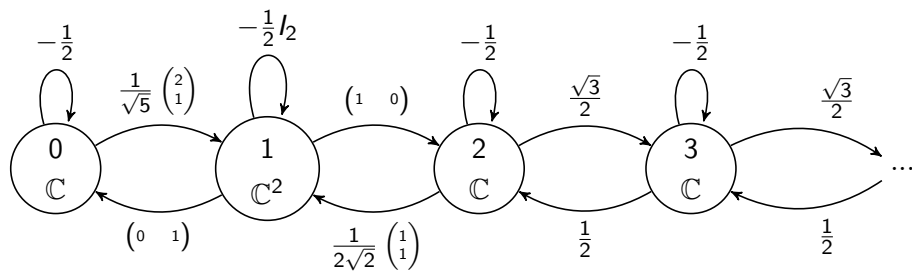


Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) < 1$

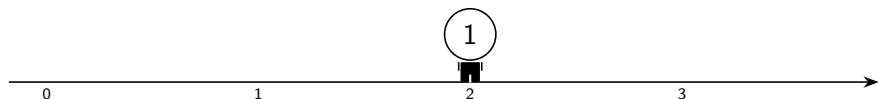


Résultats

Réurrence - Transience

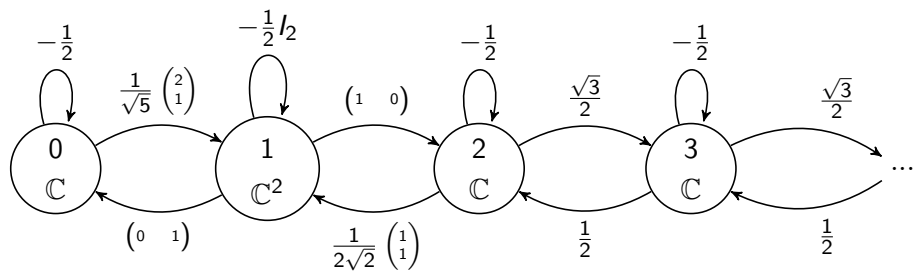


Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) < 1$

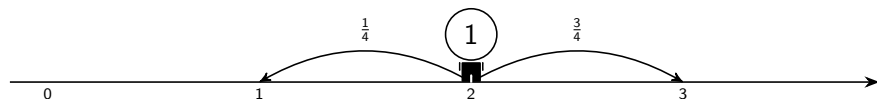


Résultats

Réurrence - Transience



Cas où $\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) < 1$



Résultats

Théorème central limite

Marches semi-finies homogènes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto G\mu + \mu G^* + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} S_i^j \mu S_i^{j*} \end{aligned}$$

où \mathcal{H} est de dimension finie, $G = G_0 \otimes I$, où $G_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et

$$\begin{aligned} S_i^j &= R_r \otimes |j\rangle\langle i| \quad \text{si } j = i + e_r \text{ où } r \in \{1, \dots, 2d\} \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

avec $R_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $r \in \{1, \dots, 2d\}$ tels que $G_0 + G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} R_r^* R_r = 0$.

Résultats

Théorème central limite

Marches semi-finies homogènes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto G\mu + \mu G^* + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} S_i^j \mu S_i^{j*} \end{aligned}$$

où \mathcal{H} est de dimension finie, $G = G_0 \otimes I$, où $G_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et

$$\begin{aligned} S_i^j &= R_r \otimes |j\rangle\langle i| \quad \text{si } j = i + e_r \text{ où } r \in \{1, \dots, 2d\} \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

avec $R_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $r \in \{1, \dots, 2d\}$ tels que $G_0 + G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} R_r^* R_r = 0$.

On note

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho &\mapsto G_0 \rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} R_r \rho R_r^* . \end{aligned}$$

Résultats

Théorème central limite

Théorème central limite [B. 2017]

Supposons que $\tilde{\mathcal{L}}$ admette un unique état invariant noté ρ_{inv} , alors

$$\frac{X_t - \alpha t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V),$$

où

$$\alpha = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^*) e_r$$

et $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que pour tout $r, q \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} V_{rq} = & -\alpha_q \text{Tr}(\rho_{inv} J_r) - \alpha_r \text{Tr}(\rho_{inv} J_q) \\ & + \delta_{rq} (\text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^*) + \text{Tr}(R_{r+d} \rho_{inv} R_{r+d}^*)) \\ & + \text{Tr}(R_q \rho_{inv} R_q^* J_r) + \text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^* J_q) \\ & - \text{Tr}(R_{q+d} \rho_{inv} R_{q+d}^* J_r) - \text{Tr}(R_{r+d} \rho_{inv} R_{r+d}^* J_q). \end{aligned}$$

Résultats

Théorème central limite

Esquisse de preuve en dimension 1 :

- Résolution de l'équation de Poisson, i.e. trouver f sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}$ t.q. :

$$\mathcal{A}f(\rho, x) = \alpha := \text{Tr}(R_1 \rho_{inv} R_1^*) - \text{Tr}(R_2 \rho_{inv} R_2^*)$$

où \mathcal{A} est le générateur du processus $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$.

Résultats

Théorème central limite

Esquisse de preuve en dimension 1 :

- Résolution de l'équation de Poisson, i.e. trouver f sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}$ t.q. :

$$\mathcal{A}f(\rho, x) = \alpha := \text{Tr}(R_1 \rho_{inv} R_1^*) - \text{Tr}(R_2 \rho_{inv} R_2^*)$$

où \mathcal{A} est le générateur du processus $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$.



Résultats

Théorème central limite

Esquisse de preuve en dimension 1 :

- Résolution de l'équation de Poisson, i.e. trouver f sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}$ t.q. :

$$\mathcal{A}f(\rho, x) = \alpha := \text{Tr}(R_1 \rho_{inv} R_1^*) - \text{Tr}(R_2 \rho_{inv} R_2^*)$$

où \mathcal{A} est le générateur du processus $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$.

↓

$$f(\rho, x) = \text{Tr}(\rho J) + x \text{ avec } J \text{ sol. de } \mathcal{L}^*(J) = -(R_1^* R_1 - R_2^* R_2 - \alpha I).$$

Résultats

Théorème central limite

Esquisse de preuve en dimension 1 :

- Résolution de l'équation de Poisson, i.e. trouver f sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}$ t.q. :

$$\mathcal{A}f(\rho, x) = \alpha := \text{Tr}(R_1 \rho_{inv} R_1^*) - \text{Tr}(R_2 \rho_{inv} R_2^*)$$

où \mathcal{A} est le générateur du processus $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$.

\Downarrow

$f(\rho, x) = \text{Tr}(\rho J) + x$ avec J sol. de $\mathcal{L}^*(J) = -(R_1^* R_1 - R_2^* R_2 - \alpha I)$.

- Construction d'une martingale grâce à l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned} M_t &= f(\rho_t, X_t) - f(\rho_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(\rho_s, X_s) ds \\ &= X_t - \alpha t + \underbrace{\text{Tr}(\rho_t J) - \text{Tr}(\rho_0 J)}_{R_t} - X_0 \end{aligned}$$

Résultats

Théorème central limite

- $(R_t)_{t \geq 0}$ est borné, donc $\frac{R_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{p.s.} 0$.

Résultats

Théorème central limite

- $(R_t)_{t \geq 0}$ est borné, donc $\frac{R_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{p.s.} 0$.
- $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale réelle de carré intégrable telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta M_s| \right) = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t} = \sigma^2.$$

Résultats

Théorème central limite

- $(R_t)_{t \geq 0}$ est borné, donc $\frac{R_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{p.s.} 0$.
- $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale réelle de carré intégrable telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta M_s| \right) = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t} = \sigma^2.$$

Grâce au théorème central limite pour les martingales à temps continu (Crimaldi, Pratelli 2005) :

$$\frac{M_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Résultats

Principe de grandes déviations

Principe de grandes déviations [B. 2017]

Si $\tilde{\mathcal{L}}$ est irréductible, alors $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux Λ^* .

Explicitement, cela signifie que pour tout ensemble ouvert G et tout ensemble fermé F tels que $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x) &\leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_t - X_0}{t} \in G \right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_t - X_0}{t} \in F \right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x). \end{aligned}$$

Résultats

Principe de grandes déviations

Esquisse de preuve pour $\mu = \rho \otimes |0\rangle\langle 0|$:

Théorème de Gärtner-Ellis

Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d . S'il existe une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ différentiable telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left(\mathbb{E}(e^{tu \cdot Z_t}) \right) = \Lambda(u),$$

alors $(Z_t)_{t \geq 0}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux :

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - \Lambda(u)).$$

Résultats

Principe de grandes déviations

Lien entre la fonction génératrice des moments de X_t et $\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}$

Résultats

Principe de grandes déviations

Lien entre la fonction génératrice des moments de X_t et $\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}$

$$\mathbb{E}\left(e^{u \cdot X_t}\right) = \text{Tr}\left(e^{t\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}}(\rho)\right)$$

$$\text{où } \tilde{\mathcal{L}}^{(u)}(\rho) = G_0\rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} R_r \rho R_r^*.$$

Résultats

Principe de grandes déviations

Lien entre la fonction génératrice des moments de X_t et $\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}$

$$\mathbb{E}\left(e^{u \cdot X_t}\right) = \text{Tr}\left(e^{t\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}}(\rho)\right)$$

$$\text{où } \tilde{\mathcal{L}}^{(u)}(\rho) = G_0\rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} R_r \rho R_r^*.$$

Propriétés de la plus grande valeur propre de $e^{t\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}}$

Posons $l_u = \max\{\text{Re}(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{L}}_u)\}$. La quantité e^{tl_u} est une valeur propre algébriquement simple de $e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}$, et le vecteur propre normé associé v_u est un état strictement positif de \mathcal{H} . De plus, l'application $u \mapsto l_u$ peut être prolongée analytiquement sur un voisinage de \mathbb{R}^d .

Résultats

Principe de grandes déviations

Lien entre la fonction génératrice des moments de X_t et $\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}$

$$\mathbb{E}\left(e^{u \cdot X_t}\right) = \text{Tr}\left(e^{t\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}}(\rho)\right)$$

$$\text{où } \tilde{\mathcal{L}}^{(u)}(\rho) = G_0\rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} R_r \rho R_r^*.$$

Propriétés de la plus grande valeur propre de $e^{t\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}}$

Posons $l_u = \max\{\text{Re}(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{L}}_u)\}$. La quantité e^{tl_u} est une valeur propre algébriquement simple de $e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}$, et le vecteur propre normé associé v_u est un état strictement positif de \mathcal{H} . De plus, l'application $u \mapsto l_u$ peut être prolongée analytiquement sur un voisinage de \mathbb{R}^d .

Grâce aux deux lemmes, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log\left(\mathbb{E}\left(e^{u \cdot X_t}\right)\right) = l_u$.

Perspectives

1 Présentation des modèles

- Marches quantiques ouvertes à temps discret
- Marches quantiques ouvertes à temps continu

2 Résultats

- Irréductibilité
- Récurrence - Transience
- Théorème central limite
- Principe de grandes déviations

3 Perspectives

- Loi des temps d'atteinte

Perspectives

Loi des temps d'atteinte

Soit A un ensemble non vide de V , on note

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0, |X_t \in A\}.$$

Perspectives

Loi des temps d'atteinte

Soit A un ensemble non vide de V , on note

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0, |X_t \in A\}.$$

Il existe une unique solution $H_\alpha^A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ au problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} X = I_{\mathcal{K}_A} \text{ sur } A, \\ (\alpha I - \mathcal{L}^*)(X) = 0_{\mathcal{K}_{V \setminus A}} \text{ sur } V \setminus A, \end{cases}$$

où $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. De plus,

$$\mathcal{E}_\alpha(H_\alpha^A) = \inf_{X \in I_{\mathcal{K}_A} + \mathcal{B}(\mathcal{K}_{V \setminus A})} \mathcal{E}_\alpha(X).$$

Par ailleurs :

$$\text{Tr} \left[(\rho \otimes |i\rangle\langle i|) H_\alpha^A \right] = \mathbb{E}_{i,\rho}(e^{-\alpha \tau_A}).$$

Merci de votre attention.