

Le problème de la schématisation de Grothendieck revisité

Bertrand Toën *

August 2020

Résumé

L'objectif de ce travail est de revenir sur le problème de la schématisation de [7], particulièrement dans le cas global au-dessus de $Spec \mathbb{Z}$. Pour cela nous démontrons la conjecture [16, Conj.2.3.6] qui exprime les groupes d'homotopie de l'affinisation d'un type d'homotopie simplement connexe et de type fini. Nous en déduisons plusieurs résultats sur le comportement du foncteur d'affinisation au-dessus de $Spec \mathbb{Z}$, que nous proposons comme une solution au problème de la schématisation de Grothendieck.

Table des matières

1	Rappels sur les champs affines	4
2	Le groupe additif de Hilbert $\mathbb{H}$	6
3	L'affinisation de $K(\mathbb{Z}, n)$	8
4	Faisceaux d'homotopie de l'affinisation	13
5	Propriétés d'injectivité du foncteur d'affinisation	16
A	Le théorème d'Eilenberg-Moore	20
B	Le topos $\mathbf{fpqc}$	22

Introduction

Dans [7] Grothendieck présente un programme pour appréhender de manière algébrique les types d'homotopie : *la schématisation de la théorie de l'homotopie*. Ce programme, qui reste inachevé dans le manuscrit, consiste à définir une notion de *type d'homotopie schématique* au-dessus de $\mathbb{Z}$, ainsi qu'un foncteur de *schématisation*, qui à tout espace X associe un type d'homotopie schématique $X \otimes \mathbb{Z}$, et qui permette une description purement algébrique de l'homotopie de X . Plus généralement,

*Partially supported by ERC-2016-ADG-741501

il doit exister une notion relative à tout anneau commutatif de base R , de sorte à ce que l'on retrouve essentiellement les théories d'homotopie rationnelles et p -adiques pour $R = \mathbb{Q}$ et $R = \mathbb{F}_p$. Lorsque $R = \mathbb{Z}$ la théorie des types d'homotopie schématiques se doit d'être, d'après Grothendieck, aussi proche que possible de celle des types d'homotopie usuels.

Ce programme a été en partie réalisé par plusieurs auteurs, et nous renvoyons en particulier à [4, 12, 16] et aux résultats spectaculaires de [13]. Dans [16] nous avons proposé de réaliser la schématisation des types d'homotopie à l'aide de la notion de *champs affines*, qui sont les champs déterminés par leurs algèbres cosimpliciales de cohomologie. Le foncteur de schématisation, au-dessus d'un anneau R , quand à lui est réalisé par le *foncteur d'affinisation* $X \mapsto (X \otimes R)^{uni}$, qui à un espace X associe un champ affine universel construit sur X . Lorsque $R = \mathbb{Q}$ nous avons montré que $(X \otimes \mathbb{Q})^{uni}$ est un modèle au type d'homotopie rationnel de X . De même, lorsque $R = \mathbb{F}_p$, $(X \otimes \mathbb{F}_p)^{uni}$ est un modèle à la complétion p -adique de X . Cependant, la description explicite du champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$, en particulier de ses groupes d'homotopie, était laissée sous forme conjecturale (voir [16, Conj. 2.3.6]).

Dans ce travail nous donnons une preuve de la conjecture [16, Conj. 2.3.6], ce qui ouvre la voie à de nombreux résultats sur le comportement du foncteur $X \mapsto (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$. Pour cela, nous rappelons l'existence d'un schéma en groupes affine $\mathbb{H}$ que nous appelons le *groupe additif de Hilbert* (voir définition 2.1). Cette terminologie est justifiée par le fait que l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{H}$ est l'algèbre des polynômes à valeurs entières, dont une $\mathbb{Z}$ -base est fournie par les célèbres polynômes de Hilbert $\binom{X}{n}$. Ce schéma en groupes $\mathbb{H}$ doit être pensé comme une version entière de la complétion de Malcev du groupe discret $\mathbb{Z}$, et joue en rôle central dans l'étude de l'affinisation des types d'homotopie. Notons que les points de $\mathbb{H}$ à valeurs dans un corps k forment ou bien le groupe additif $(k, +)$ lorsque $\mathbb{Q} \subset k$, ou bien le groupe des entiers p -adiques $\hat{\mathbb{Z}}_p$ lorsque k est de caractéristique $p > 0$ (voir la proposition 2.2 et son corollaire 2.3). Les résultats principaux de ce travail peuvent alors se résumer de la façon suivante.

Theorème 0.1 *Soit X un espace simplement connexe de type fini.*

1. *Les faisceaux d'homotopie de $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ sont donnés par*

$$\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \simeq \pi_i(X) \otimes \mathbb{H}.$$

2. *Le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$ possède une rétraction fonctorielle en X . Cette rétraction préserve de plus les morphismes induits sur les groupes d'homotopie.*
3. *L' ∞ -foncteur $X \mapsto (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ est fidèle (i.e. injectif sur les groupes d'homotopie des espaces de morphismes).*
4. *L' ∞ -foncteur $X \mapsto (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ est injectif sur les classes d'équivalence d'objets.*

Il est intéressant de contempler la formule (1) en parallèle des questions considérées dans [7]. En effet, une des questions centrales posées par Grothendieck est de savoir si les groupes d'homotopie de la schématisation de X doivent posséder, ou non, des structures de $\mathcal{O}$ -modules (en tant que faisceaux sur le gros site des schémas affines). Notre résultat répond par la négative, mais en revanche montre que ces groupes d'homotopie possèdent des structures de $\mathbb{H}$ -modules naturelles. Le schéma en groupes $\mathbb{H}$ est en réalité le groupe additif sous-jacent d'un schéma en anneaux, et est de plus muni d'un

morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{O}$ canonique. Nous aimons penser à $\mathbb{H}$ comme au *vrai faisceau structural*, que nous proposons d'appeler le *faisceau structural de Hilbert*.

L'existence de la rétraction (2) est une conséquence d'une description explicite de l'espace $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$, et icelle est elle-même conséquence de (1) et de techniques de descente adélique et fidèlement plate. Cette description est similaire avec le résultat analogue dans le cadre des E_∞ -algèbres démontré dans [13, Thm. 0.2], bien que ces deux résultats soient indépendants l'un de l'autre. En particulier, nous pensons que le théorème 0.1 combiné aux résultats de [13] implique que le morphisme naturel

$$Map_{CAlg^\Delta}(C^*(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow Map_{E_\infty}(C^*(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

qui compare espaces de morphismes pour les anneaux commutatifs cosimpliciaux et pour les E_∞ -algèbres, est toujours une équivalence (pour X simplement connexe et de type fini). Ceci est tout à fait remarquable, étant donné que l' ∞ -foncteur de normalisation, des anneaux commutatifs cosimpliciaux vers les E_∞ -algèbres, n'est pas pleinement fidèle en général. Par ailleurs, il nous importe de noter ici que les points (3) et (4) sont conséquences des résultats de [13], transportés à l'aide de l' ∞ -foncteur de normalisation, mais les preuves que nous en donnons sont différentes (et indépendantes) et se basent sur les résultats (1) – (2) et des techniques générales de la théorie des champs affines de [16]. Enfin, une comparaison précise avec [13] demanderait certains efforts supplémentaires, efforts que nous ne ferons pas dans ce travail. Par exemple, le point (3) ci-dessus est une conséquence d'un énoncé plus fort, à savoir l'existence d'une rétraction sur les espaces de morphismes (voir le corollaire 5.5). L'existence de cette rétraction est aussi démontrée dans [13] dans le cadre des E_∞ -algèbres, mais il ne semble pas immédiat de montrer que ces deux retractions soient compatibles.

Pour terminer cette introduction, signalons d'étroites relations avec les travaux [4] et [14]. Le point (1) du théorème 0.1, et la propriété universelle de l'affinisation, impliquent en particulier que le morphisme naturel

$$H^*(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O}) \longrightarrow H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout n . Le membre de droite est la cohomologie usuelle des espaces d'Eilenberg-MacLane, alors que le membre de gauche se calcule à l'aide d'un complexe explicite dont le terme de degré p vaut $B^{\otimes p^n}$, où B est l'anneau des fonctions sur $\mathbb{H}$ c'est à dire l'anneau des polynômes à valeurs entières. Dans [4] l'auteur montre aussi que la cohomologie de $K(\mathbb{Z}, n)$, et plus généralement de tout espace nilpotent de type fini, se calcule à l'aide de *cocycles numériques*, c'est à dire provenant de polynômes à valeurs entières. Il y a fort à parier que nos résultats sont ainsi très proches de ceux de [4], bien que la différence de contextes rende une comparaison précise mal aisée. Par ailleurs, le point (1) de notre théorème 0.1 implique en particulier que $(S^1 \otimes \mathbb{Z})^{uni} \simeq K(\mathbb{H}, 1)$. Cette formule est déjà démontrée dans [14], tout au moins dans un cadre p -local. La preuve que nous en donnons (voir le corollaire 3.4) suit la même stratégie mais demande une étude plus fine pour traiter le cas global sur $\mathbb{Z}$. Notons aussi que dans [14] le champ $K(\mathbb{H}, 1)$ est l'objet sous-jacent du *cercle filtré*, qui joue un rôle crucial pour la construction de la fameuse filtration HKR. Cette filtration est ici induite par la filtration naturelle sur le groupe $\mathbb{H}$, qui sur son anneau de fonctions n'est autre que la filtration induite par le degré des polynômes. Cela suggère que le cercle filtré de [14] n'est qu'un cas particulier d'une filtration qui existe naturellement sur le champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ pour tout espace X , et dont la filtration induite sur le groupes d'homotopie serait celle induite par la filtration existante sur $\mathbb{H}$ à travers la formule (1) du théorème 0.1. Ce point particulier n'est pas traité dans ce travail

et fera l'objet d'investigations futures.

Remerciements : Je remercie tout particulièrement Joseph Tapia, pour de très nombreuses discussions sur les vecteurs de Witt, qui m'ont, au cours de ces années, convaincus de leur importance pour la question de la schématisation des types d'homotopie de [7]. Je remercie chaleureusement Tasos Moulinos et Marco Robalo, dont les multiples discussions sur le cercle filtré de [14] ont été sources d'inspiration pour un certain nombre de preuves des résultats de ce travail.

Ce travail a été en parti financé par l'ERC au sein du programme Horizon 2020 (projet NEDAG ERC-2016-ADG-741501).

1 Rappels sur les champs affines

On note $St_{\mathbb{Z}}$ l' ∞ -catégorie des champs *fpgc* sur le gros site des schémas affines. Pour tout espace X nous noterons encore $X \in St_{\mathbb{Z}}$ le champ constant associé. On rappelle que l' ∞ -catégorie des champs affines (au-dessus de $Spec \mathbb{Z}$) est la plus petite sous- ∞ -catégorie pleine de $St_{\mathbb{Z}}$ qui contient les champs $K(\mathbb{G}_a, n)$ pour tout $n \geq 0$ et qui est stable par limites homotopiques ($\mathbb{U}$ -petites, voir notre appendice B). Cette ∞ -catégorie sera notée $ChAff \subset St_{\mathbb{Z}}$.

On dispose d'un ∞ -foncteur de sections globales $\Gamma = (-)(\mathbb{Z}) : St_{\mathbb{Z}} \longrightarrow Top$, de l' ∞ -catégorie des champs vers celle des types d'homotopie, qui à un champ F , vue comme foncteur sur la catégorie des anneaux commutatifs, associe $F(\mathbb{Z})$. Cet ∞ -foncteur possède un adjoint à gauche $Top \longrightarrow St_{\mathbb{Z}}$ qui à un espace X associe le champ constant correspondant que nous noterons encore simplement par X .

Nous pouvons retenir Γ à l' ∞ -catégorie $ChAff$ des champs affines. L' ∞ -foncteur d'affinisation est alors l'adjoint à gauche du foncteur Γ

$$(- \otimes \mathbb{Z})^{uni} : Top \longrightarrow ChAff.$$

L'existence de cet ∞ -foncteur (modulo des questions d'univers que nous ignorons ici) est démontrée dans [16], et on peut voir qu'il est donné explicitement par la formule suivante

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni} = \mathbb{R}Spec C^*(X, \mathbb{Z}).$$

Ici, $C^*(X, \mathbb{Z})$ désigne l'anneau cosimplicial commutatif de cohomologie de X , qui est concrètement donné par le diagramme cosimplicial $[n] \mapsto \mathbb{Z}^{X_n}$, où X_n est l'ensemble des n -simplexes de X . Le spectre $\mathbb{R}Spec C^*(X, \mathbb{Z})$ est quand à lui le foncteur sur les anneaux commutatifs défini par $\mathbb{R}Spec C^*(X, \mathbb{Z})(R) = Map(C^*(X, \mathbb{Z}), R)$, où le *Map* du membre de droite désigne ici le *mapping space* de la catégorie de modèles des anneaux cosimpliciaux commutatifs (ou de manière équivalente les espaces de morphismes de l' ∞ -catégorie d'iceux). L'ensemble simplicial $Map(C^*(X, \mathbb{Z}), R)$ se décrit explicitement comme $Hom(Q(C^*(X, \mathbb{Z})), C^*(\Delta^*, R))$, où Q est un foncteur de remplacement cofibrant, et $C^*(\Delta^*, R)$ est l'objet simplicial (dans la catégorie des anneaux commutatifs cosimpliciaux) donné par $[n] \mapsto C^*(\Delta^n, R)$.

Nous rappelons enfin les faits suivants démontrés dans [16].

1. La sous- ∞ -catégorie $ChAff \subset St_{\mathbb{Z}}$ est stable par limites homotopiques arbitraires ($\mathbb{U}$ -petites).

2. Un champ $F \in St_{\mathbb{Z}}$ est affine si et seulement s'il existe un anneau commutatif cosimplicial R^* et une équivalence $F \simeq \mathbb{R}Spec R^*$.
3. Les champs $K(\mathbb{G}_a, n)$ sont affines pour tout $n \geq 0$, et sont de plus donnés par $K(\mathbb{G}_a, n) \simeq \mathbb{R}Spec \mathbb{Z}[x_n]$, où $\mathbb{Z}[x_n]$ est l'anneau commutatif cosimplicial libre sur un générateur en degré n .
4. Pour tout espace X simplement connexe et de type fini (i.e. $\pi_i(X)$ est de type fini pour tout $i > 1$) le morphisme naturel

$$X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Q})$$

identifie $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Q})$ avec la rationalisation $X_{\mathbb{Q}}$ de X . C'est à dire que les groupes d'homotopie de $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Q})$ sont les rationalisés de ceux de X .

5. Pour un espace X simplement connexe et de type fini et tout corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$ le morphisme naturel

$$X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(k)$$

identifie $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(k)$ avec la complétion p -adique X_p de X . C'est à dire que les groupes d'homotopie de $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(k)$ sont les complétés p -adiques de ceux de X . Plus précisément le champ $(X \otimes k)^{uni}$ est constant de fibre l'espace X_p , complété p -adique de X (voir corollaire B.3).

Pour terminer, rappelons le fait suivant, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de cet article. Il s'agit d'une conséquence de [16, Thm. 2.2.9] qui affirme qu'un affinisation est une $\mathcal{O}$ -localisation (voir la remarque après [16, Def. 2.3.1]).

Proposition 1.1 *Soit X un espace topologique et F un champ affine muni d'un morphisme $u : X \rightarrow F(\mathbb{Z})$ (ou de manière équivalente du champ constant X vers F). Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme déduit de u par adjonction*

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni} \longrightarrow F$$

est une équivalence.

2. *Le morphisme induit par u en cohomologie*

$$u^* : H^*(F, \mathcal{O}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$$

est bijective.

Preuve : Il s'agit de remarquer que la cohomologie à coefficients dans $\mathcal{O}$ est représentable par les champs $K(\mathbb{G}_a, n)$

$$H^{n-i}(F, \mathcal{O}) \simeq \pi_i(Map(F, K(\mathbb{G}_a, n))) \quad H^{n-i}(X, k) \simeq \pi_i(Map(X, K(\mathbb{G}_a, n))),$$

et d'utiliser que tout champ affine est une limite petite de champs de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$. □

2 Le groupe additif de Hilbert $\mathbb{H}$

On note B le sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$ formé des polynômes P tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. L'anneau B est l'anneau binomial libre sur un générateur, et on renvoie à [5] pour la notion générale d'anneaux binomiaux. On rappelle que B est un $\mathbb{Z}$ -module libre de base les polynômes de Hilbert

$$\binom{X}{n} := \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

L'anneau B est une $\mathbb{Z}$ -algèbre de Hopf pour la comultiplication induite par la comultiplication usuelle sur $\mathbb{Q}[X]$ qui envoie X sur $X \otimes 1 + 1 \otimes X$. L'algèbre de Hopf B n'est autre que le dual $\mathbb{Z}$ -linéaire de l'algèbre de Hopf complète correspondant au groupe formel $\hat{\mathbb{G}}_m$.

Définition 2.1 *Le groupe additif de Hilbert $\mathbb{H}$ est le schéma en groupes sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ défini par*

$$\mathbb{H} := \text{Spec } B.$$

On note que $\mathbb{H}$ est par définition un schéma en groupes affine et plat au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Il s'agit du dual de Cartier du groupe formel $\hat{\mathbb{G}}_m$ (voir [2]). Ses fibres au-dessus de corps peuvent être décrites explicitement comme suit. Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$. Ou bien $p = 0$ et alors $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ au-dessus de $\text{Spec } k$. Ou bien $p > 0$ et alors $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est isomorphe au groupe proétale $\hat{\mathbb{Z}}_p$ des entiers p -adiques (voir le corollaire 2.3 pour une preuve de ce fait).

Il existe une définition alternative de $\mathbb{H}$ comme vecteurs de Witt fixes par tous les endomorphismes de Frobenius. On note, pour tout anneau commutatif R , $\mathbb{W}(R)$ l'anneau des gros vecteurs de Witt à coefficients dans R (voir par exemple [8]). Le foncteur $R \mapsto \mathbb{W}(R)$ est représentable par un schéma affine, et nous considérerons principalement $\mathbb{W}$ comme un schéma en groupes affine (au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}$) pour la loi additive. On rappelle que le groupe $\mathbb{W}(R)$ s'identifie au groupe multiplicatif $1 + TR[[T]]$, des séries formelles à coefficients dans R de termes constants égaux à 1.

Le foncteur $\mathbb{W}$ est muni, pour chaque entier $n > 0$, d'un endomorphisme de Frobenius $F_n : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$. Cet endomorphisme est caractérisé par sa fonctorialité en R , la formule $F_n(1 - aT) = (1 - a^n T)$ pour tout $a \in R$, et sa compatibilité avec la topologie naturelle sur $\mathbb{W}(R)$ (topologie produit). Les endomorphismes F_n vérifient de plus la formule $F_n F_m = F_{nm}$, et en particulier commutent entre eux.

Proposition 2.2 *Il existe un monomorphisme*

$$j : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{W}$$

qui identifie $\mathbb{H}$ au sous-foncteur des points fixes simultanés des endomorphismes F_n : pour tout anneau R l'image $j(\mathbb{H}(R))$ consiste en tous les $x \in \mathbb{W}(R)$ tels que $F_n(x) = x$ pour tout entier $n > 0$.

Preuve : L'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ est l'anneau binomial libre à un générateur $\text{Bin}(\mathbb{Z})$ au sens de [5]. On rappelle alors que le foncteur d'oubli des anneaux dans les anneaux binomiaux possède un adjoint à droite, qui à R associe le sous-anneau $\mathbb{W}(R)^F$ de $\mathbb{W}(R)$ formé des points fixes de tous les Frobenius (voir [5, Thm. 9.1 (3)]). Ainsi, on a des bijections fonctorielles en R

$$\mathbb{H}(R) \simeq \text{Hom}(\text{Bin}(\mathbb{Z}), R) \simeq \text{Hom}_{\text{Bin}}(\text{Bin}(\mathbb{Z}), \mathbb{W}(R)^F) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{W}(R)^F) \simeq \mathbb{W}(R)^F,$$

où les Hom désignent ici les ensembles de morphismes d'anneaux et Hom_{Bin} ceux d'anneaux binomiaux.

En termes plus explicite, cela fournit un isomorphisme de foncteurs en groupes $\mathbb{H} \simeq \mathbb{W}^F \subset \mathbb{W}$ qui peut se décrire de la manière suivante. Un élément de $\mathbb{H}(R)$ n'est autre qu'une suite d'éléments $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ qui vérifient les relations binomiales (voir par exemple [5, Lem. 3.3]). À une telle suite la bijection précédente associe le vecteur de Witt

$$(1 - T)^{a_*} := \sum_i (-1)^i a_i T^i \in \mathbb{W}(R).$$

□

La proposition 2.2 permet de préciser la structure du schéma en groupes $\mathbb{H}$ localement autour d'un nombre premier fixé p . Nous savons, d'après [9, Prop. 6], que le schéma en groupes $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}_{(p)}} := \mathbb{W} \times_{Spec \mathbb{Z}_{(p)}}$, restriction de $\mathbb{W}$ au-dessus de $Spec \mathbb{Z}_{(p)}$, se décompose en un produit infini

$$\mathbb{W}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \simeq \prod_{p \nmid n} \mathbb{W}_{p^\infty},$$

où $\mathbb{W}_{p^\infty}$ est le schéma en groupes des vecteurs de Witt p -typiques. Les Frobenius F_n opèrent sur ce produit de la manière suivante. Si n est premier à p , alors F_n opère sur une suite d'éléments $(a_i)_{p \nmid i}$ par le formule $F_n(a_*)_i := a_{ni}$. De plus, F_p opère de manière diagonale par le p -ème Frobenius sur $\mathbb{W}_{p^\infty}$.

Ainsi, la proposition 2.2 montre que le schéma en groupes $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$, restriction de $\mathbb{H}$ au-dessus de $Spec \mathbb{Z}_{(p)}$, est canoniquement isomorphe au groupe des points fixes de F_p opérant sur $\mathbb{W}_{p^\infty}$. Le schéma en groupes $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ est ainsi isomorphe au schéma en groupes considéré dans [14], et noté Fix .

Corollaire 2.3 *Pour tout premier p et tout entier n , soit $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/p^n}$ la restriction de $\mathbb{H}$ au-dessus de $Spec \mathbb{Z}/p^n$. On dispose d'un isomorphisme de faisceaux fpqc au-dessus de $Spec \mathbb{Z}/p^n$*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/p^n} \simeq \hat{\mathbb{Z}}_p = \lim_k \mathbb{Z}/p^k,$$

où le membre de droite est le faisceau fpqc constant associé au groupe profini $\hat{\mathbb{Z}}_p$ des entiers p -adiques.

Preuve : On sait qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{Z}/p^n} \longrightarrow \mathbb{W}_{p^\infty} \xrightarrow{Id - F_p} \mathbb{W}_{p^\infty}$$

Le morphisme $Id - F_p$ est un morphisme formellement étale de schémas affines et plats sur $\mathbb{Z}/p^n$, car cela peut se tester au-dessus du corps résiduel $\mathbb{F}_p$ pour lequel la dérivée de $Id - F_p$ est partout l'identité. On a donc que $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/p^n}$ est un schéma en groupes affine plat et formellement étale au-dessus de $\mathbb{Z}/p^n$. Or, le foncteur de changement de bases le long de $\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \mathbb{F}_p$ induit une équivalence de catégories entre les catégories des schémas affines plats et formellement étales sur $\mathbb{Z}/p^n$ et sur $\mathbb{F}_p$. Ainsi, comme $\mathbb{H}_{\mathbb{F}_p}$ est constant de fibre $\hat{\mathbb{Z}}_p$, il en est de même de $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/p^n}$. □

3 L'affinisation de $K(\mathbb{Z}, n)$

Nous avons vu que $\mathbb{H}$ s'identifie au sous-groupe $\mathbb{W}^F \subset \mathbb{W}$ des points fixes simultanés des Frobenius F_n . Ceci va maintenant nous permettre de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Le champ $K(\mathbb{H}, n)$ est un champ affine au sens de [16].*

Preuve : On ordonne les nombres premiers $2 = p_2 < p_3 < p_4 \cdots < p_k < p_{k+1} \dots$. Pour un entier $k \geq 2$ le sous-foncteur en groupes $\mathbb{H}_k \subset \mathbb{W}$ est alors défini comme les points fixes de tous les Frobenius F_{p_i} avec $i \leq k$. On dispose ainsi d'une suite décroissante de sous-foncteurs en groupes

$$\mathbb{H} \subset \cdots \subset \mathbb{H}_k \subset \mathbb{H}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathbb{H}_2 \subset \mathbb{H}_1 := \mathbb{W}.$$

Il s'agit d'une suite de sous-schémas en groupes affines, fermés dans $\mathbb{W}$, et par définition nous avons un isomorphisme de faisceaux fpqc

$$\mathbb{H} \simeq \lim_k \mathbb{H}_k.$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat classique suivant, pour lequel nous ne connaissons pas de référence et dont nous incluons donc une preuve. Pour des schémas de type fini il s'agit d'un cas particulier du critère de platitude par fibres [6, Cor 11.3.11].

Lemme 3.2 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines et plats sur $\mathbb{Z}$. Si pour tout corps k le morphisme induit par changement de bases*

$$X \times \text{Spec } k \rightarrow Y \times \text{Spec } k$$

est plat (resp. fidèlement plat), alors f est plat (resp. fidèlement plat).

Preuve du sous-lemme : Notons $X \times \text{Spec } k$ par X_k , et de même $Y \times \text{Spec } k$ par Y_k (pour tout corps k). De même notons $X = \text{Spec } B$ et $Y = \text{Spec } A$.

Soit $A \rightarrow B$ le morphisme d'anneaux correspondant à f et M un A -module et commençons par l'énoncé de platitude. Il nous faut donc montrer que le complexe $N := M \otimes_A^{\mathbb{L}} B$ est cohomologiquement concentré en degré zéro. Pour cela, on prend tout d'abord $k = \mathbb{Q}$, et on voit que $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est cohomologiquement concentré en degré 0. Ainsi, les groupes de cohomologie $H^i(N) \simeq H^i(M) \otimes \mathbb{Q}$ sont tous nuls pour $i < 0$, et ainsi $H^i(M)$ est de torsion pour $i < 0$.

De plus, l'hypothèse implique que $X_{\mathbb{F}_p}$ est plat sur $Y_{\mathbb{F}_p}$, et la formule du changement de base montre alors que $N \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p$ est cohomologiquement concentré en degrés $[-1, 0]$ pour tout premier p . Ceci montre tout d'abord que N est lui-même cohomologiquement concentré en degré $[-1, 0]$. Par ailleurs, comme complexe de groupe abélien on a $N \simeq H^{-1}(N)[1] \oplus H^0(N)$ avec $H^{-1}(N)$ de torsion. Supposons $H^{-1}(N) \neq 0$. Alors il possède un élément non-nul et de p -torsion pour un certain premier p . Comme $H^{-2}(N \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p)$ contient $\text{Tor}_1(H^{-1}(N), \mathbb{Z}/p)$ en facteur direct il est donc lui aussi non-nul, ce qui est une contradiction. Ainsi $H^{-1}(N) = 0$ et on a donc bien que $A \rightarrow B$ est plat. Enfin, pour l'énoncé de fidèle platitude, on sait déjà que f est plat et il reste donc à voir la surjectivité de f sur les points à valeurs dans des corps. Mais ceci est clairement une conséquence de l'hypothèse. $\square$

Pour tout k , on dispose d'une suite exacte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_k \longrightarrow \mathbb{H}_{k-1} \xrightarrow{Id-F_{p_k}} \mathbb{H}_{k-1}.$$

La décomposition en produit infini $\mathbb{W}_{\mathbb{F}_p} \simeq \prod_{p \nmid n} \mathbb{W}_{p^\infty}$ comme schéma en groupes au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{F}_p$, et la description de Frobenius sur ce produit (voir la discussion avant le corollaire 2.3) montrent que la suite exact ci-dessus devient aussi exacte à droite lorsque restreinte à $\mathbb{F}_p$. Une application du lemme 3.2 montre que pour tout k le morphisme $Id - F_{p_k}$ est fidèlement plat et l'on dispose ainsi d'une suite exacte courte de faisceaux *fpqc*

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_k \longrightarrow \mathbb{H}_{k-1} \xrightarrow{Id-F_{p_k}} \mathbb{H}_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Par récurrence sur k cela montre aussi que tous les $\mathbb{H}_k$ sont des schémas en groupes affines et plats sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Lemme 3.3 *Pour tout $n \geq 1$, le morphisme naturel*

$$K(\mathbb{H}, n) \longrightarrow \text{ho } \lim_k K(\mathbb{H}_k, n)$$

est un équivalence de champs.

Preuve du lemme : Commençons par remarquer que le foncteur de faisceautisation pour la topologie fpqc commute avec tout type de limites dénombrables. Il commute aussi avec les foncteurs dérivés $\lim^i$ pour les diagrammes dénombrables (voir l'appendice A pour ces deux assertions). En particulier, pour une tour de morphismes entre faisceaux en groupes abéliens

$$\dots \longrightarrow F_k \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1$$

les morphismes naturels

$$a(\lim_k F_k) \longrightarrow \lim_k F_k \quad a(\lim_k^i F_k) \longrightarrow \lim_k^i F_k$$

sont des isomorphismes de faisceaux (où le $\lim^i$ de droite est calculé dans la catégorie abélienne des faisceaux fpqc abéliens et ceux du membre de gauche dans la catégorie des préfaisceaux abéliens). En particulier, $(\lim_k^i F_k) \simeq \lim_k^i F_k = 0$ pour tout $i > 1$. Les faisceaux d'homotopie non-nuls du champ $\text{ho } \lim_k K(\mathbb{H}_k, n)$ sont donc ainsi concentrés en degrés n et $n-1$ et sont donnés par

$$\pi_n(\text{holim}_k K(\mathbb{H}_k, n)) \simeq \mathbb{H} \quad \pi_{n-1}(\text{holim}_k K(\mathbb{H}_k, n)) \simeq \lim_k^1(\mathbb{H}_k).$$

Le morphisme dont il est question dans l'énoncé du lemme induit un isomorphisme sur les faisceaux π_n , et il nous reste donc à voir que $\lim_k^1 \mathbb{H}_k \simeq 0$.

Soit $\mathbb{N}^+$ la catégorie des entiers naturels strictement positifs ordonnés par l'ordre inverse de l'ordre usuel. On dispose de trois $\mathbb{N}^+$ -diagrammes de faisceaux *fpqc* abéliens, à savoir $k \mapsto \mathbb{H}_k$, $k \mapsto \mathbb{W}/\mathbb{H}_k$ et le diagramme constant égal à $\mathbb{W}$. Notons respectivement par $\mathbb{H}_*$, $\mathbb{W}/\mathbb{H}_*$ et $\mathbb{W}$ ces trois $\mathbb{N}^+$ -diagrammes, de sorte à ce qu'ils soient reliés par une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_* \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}/\mathbb{H}_* \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue sur les foncteurs dérivés de la limite le long de $\mathbb{N}^+$ nous donne alors une suite exacte de faisceaux abéliens

$$\mathbb{H} = \lim_k \mathbb{H}_k \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k) \longrightarrow \lim_k^1 \mathbb{H}_k \longrightarrow 0.$$

Rappelons que l'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_k \longrightarrow \mathbb{H}_{k-1} \xrightarrow{Id - F_{p_k}} \mathbb{H}_{k-1} \longrightarrow 0,$$

et donc des isomorphismes $\mathbb{H}_{k-1}/\mathbb{H}_k \simeq \mathbb{H}_{k-1}$. De plus, le morphisme $Id - F_{p_k}$ est fidèlement plat. Ainsi, les faisceaux $\mathbb{H}_{k-1}/\mathbb{H}_k$ sont tous représentables par des schémas affines et plats, ce qui implique par récurrence sur k que $\mathbb{W}/\mathbb{H}_k$ est, lui aussi, représentable par un schéma affine et plat. Le morphisme induit sur la limite $\mathbb{W} \longrightarrow \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k)$ est ainsi un morphisme de schémas en groupes affines et plats sur $Spec \mathbb{Z}$.

Nous appliquons maintenant le lemme 3.2 au morphisme $\mathbb{W} \longrightarrow \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k)$. Ce morphisme induit au-dessus de chaque corps un morphisme fidèlement plat de schémas en groupes. En effet, au-dessus d'un corps k le schéma en groupes $\mathbb{W}$ se décompose en un produit infini qui se décrit suivant la caractéristique de k (voir le paragraphe avant le corollaire 2.3). Il est aisé de voir, à l'aide de ces deux descriptions, que, pour tout corps k , le morphisme de schémas en groupes

$$\mathbb{W} \times Spec k \longrightarrow \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k) \times Spec k$$

est un épimorphisme (pour la topologie fpqc) de schémas en groupes affines, et donc est un morphisme fidèlement plat de schémas. Le lemme 3.2 implique ainsi que $\mathbb{W} \longrightarrow \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k)$ est un morphisme fidèlement plat de schémas en groupes affines sur $Spec \mathbb{Z}$, et donc un épimorphisme de faisceaux fpqc. Ainsi, nous avons un isomorphisme de faisceaux $\mathbb{W}/\mathbb{H} \simeq \lim_k (\mathbb{W}/\mathbb{H}_k)$, ce qui implique que $\lim_k^1 (\mathbb{H}_k) = 0$ comme convenu. $\square$

Nous revenons à la preuve de la proposition 3.1. Nous avons vu l'existence d'une suite de fibration de champs affines

$$K(\mathbb{H}_k, n) \longrightarrow K(\mathbb{H}_{k-1}, n) \longrightarrow K(\mathbb{H}_{k-1}, n).$$

Comme les champs affines sont stables par limites homotopiques (voir [16]) on voit par récurrence sur k , que $K(\mathbb{H}_k, n)$ est un champ affine pour tout k . Enfin, $K(\mathbb{H}, n)$ étant la limite homotopique des $K(\mathbb{H}_k, n)$, on en déduit que $K(\mathbb{H}, n)$ est un champ affine à l'aide de [16, Prop. 2.2.7], ce qui achève la preuve de la proposition 3.1. $\square$

La proposition 3.1 possède la conséquence importante suivante, qui répond à la conjecture [16, Conj. 2.3.6]. Notons que $\mathbb{W}$ reçoit un unique morphisme additif $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{W}$ donné par l'unité dans l'anneau $\mathbb{W}(\mathbb{Z})$. Cet unité appartient à $\mathbb{H}$ et on a donc ainsi un morphisme canonique de faisceaux en groupes $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{H}$. Par construction, ce morphisme envoie un entier n sur la série $(1 - T)^n \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et fournit un isomorphisme sur les sections globales $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{H}(\mathbb{Z})$.

Corollaire 3.4 *Soit $n \geq 1$. Le morphisme canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{H}$ induit un morphisme de champs*

$$K(\mathbb{Z}, n) \longrightarrow K(\mathbb{H}, n)$$

qui fait de $K(\mathbb{H}, n)$ l'affinisation de $K(\mathbb{Z}, n)$ au-dessus de $Spec \mathbb{Z}$. En d'autres termes, le morphisme induit en cohomologie $H^(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O}) \longrightarrow H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.*

Preuve : Nous savons déjà que $K(\mathbb{H}, n)$ est un champ affine, et il nous faut donc montrer que le morphisme induit sur les complexes de cohomologie

$$C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O})$$

est un quasi-isomorphisme (voir la proposition 1.1).

Commençons par le cas $n = 1$. Dans ce cas, la formation du complexe $C^*(K(\mathbb{H}, 1), \mathcal{O})$ est compatible aux changement de bases le long des morphismes $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$. En effet, comme $K(\mathbb{H}, 1)$ est le quotient de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ par $\mathbb{H}$, le complexe $C^*(K(\mathbb{H}, 1), \mathcal{O})$ peut se représenter comme le complexe de cohomologie de Hochschild

$$\mathbb{Z} \longrightarrow B \longrightarrow B^{\otimes 2} \longrightarrow \dots \longrightarrow B^{\otimes n} \longrightarrow B^{\otimes n+1} \longrightarrow \dots,$$

où $B = \mathcal{O}(\mathbb{H})$ est l'algèbre de Hopf des polynômes à valeurs entières, et où la différentielle est induite par la comultiplication $B \longrightarrow B^{\otimes 2}$ (voir [3, §III]). Cette présentation, et la platitude de B sur $\mathbb{Z}$, implique que les morphismes induits

$$C^*(K(\mathbb{H}, 1), \mathcal{O}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow C^*(K(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, 1), \mathcal{O})$$

$$C^*(K(\mathbb{H}, 1), \mathcal{O}) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow C^*(K(\mathbb{H}_{\mathbb{F}_p}, 1), \mathcal{O})$$

sont tous deux des quasi-isomorphismes (où l'on a noté $\mathbb{H}_k := \mathbb{H} \times \text{Spec } k$ pour un corps k). Ainsi, pour vérifier que le morphisme $C^*(K(\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(K(\mathbb{H}, 1), \mathcal{O})$ est un quasi-isomorphisme, il suffit de montrer l'énoncé analogue pour les champs $K(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, 1)$ et $K(\mathbb{H}_{\mathbb{F}_p}, 1)$. Or, ces champs sont respectivement $K(\mathbb{G}_a, 1)$ et $K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 1)$. Ainsi, le corollaire pour $n = 1$ se déduit du fait que l'on sait déjà que les morphismes naturels

$$K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\mathbb{G}_a, 1) \quad K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 1)$$

sont des affinisations au-dessus de $\mathbb{Q}$ et des corps finis $\mathbb{F}_p$ respectivement (voir [16]).

Enfin, le cas $n > 1$ se réduit au cas $n = 1$ de la manière suivante. On remarque que $K(\mathbb{H}, n)$ et $K(\mathbb{Z}, n)$ sont tous deux les classifiants des champs en groupes $K(\mathbb{H}, n-1)$ et $K(\mathbb{Z}, n-1)$. Ainsi, les complexes de cohomologie $C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z})$ et $C^*(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O})$ s'écrivent comme des limites homotopiques

$$C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}) \simeq \text{ho} \lim_{k \in \Delta} C^*(K(\mathbb{Z}, n-1), \mathbb{Z})^{\otimes k}$$

$$C^*(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O}) \simeq \text{ho} \lim_{k \in \Delta} C^*(K(\mathbb{H}, n-1), \mathcal{O})^{\otimes k}.$$

Le morphisme $C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(K(\mathbb{H}, n), \mathcal{O})$ étant compatible à ces décompositions, nous concluons par récurrence sur n . $\square$

Le corollaire 3.4 possède la conséquence intéressante suivante.

Corollaire 3.5 *Il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf*

$$\mathcal{O}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{C^*(S^1, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}$$

(en particulier le membre de droite est cohomologiquement concentré en degré 0).

Preuve : En effet, on a un carré homotopiquement cartésien de champs affines

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K(\mathbb{H}, 1). \end{array}$$

En en prenant les algèbres cosimpliciales de cohomologie, et en utilisant le corollaire 3.4 on trouve un carré homotopiquement cocartésien d'algèbres cosimpliciales commutatives

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathbb{H}) & \longleftarrow & \mathbb{Z} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & C^*(S^1, \mathbb{Z}) \end{array}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Il est possible de poursuivre dans la direction du corollaire 3.5 pour obtenir une interprétation tannakienne du schéma en groupes $\mathbb{H}$. Pour cela on considère $QCoh(S^1)$ l' ∞ -catégorie des complexes de faisceaux abéliens sur le cercle S^1 dont les faisceaux de cohomologie sont localement constants. C'est une ∞ -catégorie $\mathbb{Z}$ -linéaire et symétrique monoïdale. On considère la sous- ∞ -catégorie symétrique monoïdale $QCoh^{uni}(S^1)$ engendrée par colimites et décalage par l'unité $\mathcal{O}$. Cette ∞ -catégorie peut aussi s'écrire de la forme $\mathcal{D}(A)$, l' ∞ -catégorie des complexes de A -dg-module, où $A = C^*(S^1, \mathbb{Z})$ vue comme E_∞ -algèbre. Le foncteur fibre $QCoh(S^1) \rightarrow QCoh(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}) = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ induit un ∞ -foncteur $\mathbb{Z}$ -linéaire et symétrique monoïdal

$$\omega : QCoh^{uni}(S^1) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}).$$

Il s'agit, à l'aide de l'identification $QCoh^{uni}(S^1) \simeq \mathcal{D}(A)$, du changement de bases le long de l'augmentation naturelle $A \rightarrow \mathbb{Z}$.

Pour tout anneau commutatif R , on dispose de la composition

$$\omega \otimes R : QCoh^{uni}(S^1) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(R),$$

qui est encore un ∞ -foncteur $\mathbb{Z}$ -linéaire et symétrique monoïdal. On dispose d'une suite exacte d'espaces de morphismes

$$\mathrm{Map}_{QCoh^{uni}(S^1)}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}), \mathcal{D}(R)) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}), \mathcal{D}(R)) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(QCoh^{uni}(S^1), \mathcal{D}(R))$$

où la fibre est prise au point $\omega \otimes R$, et $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}$ désigne ici l'espace des ∞ -foncteurs continus symétriques monoïdaux au-dessus d'une ∞ -catégorie symétrique monoïdale fixée $\mathcal{C}$. Comme le terme du milieu est clairement contractile, nous trouvons une équivalence fonctorielle en R

$$\mathrm{aut}^\otimes(\omega \otimes R) \simeq \mathrm{Map}_{QCoh^{uni}(S^1)}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}), \mathcal{D}(R)).$$

Par ailleurs, l' ∞ -foncteur $A \mapsto \mathcal{D}(A)$, depuis les E_∞ -algèbres vers les ∞ -catégories monoïdales symétriques présentables, est pleinement fidèle (voir [10]). Ainsi, le membre de droite de l'équivalence ci-dessus se décrit par

$$\mathrm{Map}_{QCoh^{uni}(S^1)}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}), \mathcal{D}(R)) \simeq \mathrm{Map}(\mathbb{Z} \otimes_A^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}, R) \simeq \mathbb{H}(R).$$

En somme, nous avons montré que le foncteur $R \mapsto \text{aut}^\otimes(\omega \otimes R)$, des auto-équivalences symétriques monoïdaux de ω , est représentable par le schéma en groupes $\mathbb{H}$. Un fait que nous pouvons résumer par : le schéma en groupes $\mathbb{H}$ est le dual de Tannaka des systèmes locaux unipotents sur S^1 .

4 Faisceaux d'homotopie de l'affinisation

On rappelle qu'un espace (connexe et) simplement connexe $X \in \text{Top}$ est de *type fini* si les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ sont tous de type fini. L'énoncé suivant est le théorème central de cet article.

Théorème 4.1 *Soit X un espace simplement connexe et de type fini. Alors il existe, pour tout i , des isomorphismes naturels de faisceaux en groupes*

$$\pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{H} \simeq \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}}).$$

Preuve : Nous allons construire les isomorphismes $\pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{H} \simeq \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}})$ au cours de la preuve. Nous procéderons par une récurrence sur la tour de Postnikov de X

$$X \longrightarrow \dots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \quad X_2 \longrightarrow X_1 = *,$$

et notons $\pi_i = \pi_i(X)$. Nous commençons ainsi par traiter le cas des espaces d'Eilenberg-MacLane. Notons que le théorème implique en particulier, que si X est de plus n -tronqué (i.e. $\pi_i(X) = 0$ pour $i > n$), alors le champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}}$ est lui-même n -tronqué.

Lemme 4.2 *Soit π un groupe abélien de type fini. Alors, pour tout $n > 1$, on a une équivalence naturelle de champs*

$$(K(\pi, n) \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}} \simeq K(\pi \otimes \mathbb{H}, n).$$

Cette équivalence est de sorte à ce que le morphisme d'adjonction $K(\pi, n) \rightarrow (K(\pi, n) \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}}$ soit de plus induit par le morphisme naturel de faisceaux $\pi \rightarrow \pi \otimes \mathbb{H}$.

Preuve du lemme : Lorsque $\pi = \mathbb{Z}$ ce lemme est la proposition 3.1. Le cas $\pi = \mathbb{Z}^m$ s'en déduit aisément par Kunneth

$$(K(\mathbb{Z}, n)^m \otimes \mathbb{Z})^{\text{uni}} \simeq \mathbb{R}\text{Spec}(C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z})^{\otimes m}) \simeq \mathbb{R}\text{Spec}(C^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}))^{\times m} \simeq K(\pi \otimes \mathbb{H}, n).$$

Dans le cas général, toujours par l'argument de Kunneth, il nous reste à traiter le cas $\pi = \mathbb{Z}/m$ d'un groupe cyclique. Dans ce cas, on dispose d'un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} K(\pi, n) & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbb{Z}, n+1) & \xrightarrow{\times m} & K(\mathbb{Z}, n+1). \end{array}$$

Nous sommes dans les conditions d'applications du théorème d'Eilenberg-Moore rappelé dans l'appendice A, et ainsi le carré précédent induit un carré homotopiquement cocartésien d'algèbres co-simpliciales commutatives

$$\begin{array}{ccc} C^*(K(\mathbb{Z}, n+1), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^*(K(\mathbb{Z}, n+1), \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & C^*(K(\pi, n), \mathbb{Z}). \end{array}$$

En en prenant les spectres correspondants, et en utilisant le cas déjà connu de $\pi = \mathbb{Z}$, on trouve un carré homotopiquement cartésien de champs affines

$$\begin{array}{ccc} (K(\pi, n) \otimes \mathbb{Z})^{uni} & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbb{H}, n+1) & \xrightarrow{\times m} & K(\mathbb{H}, n+1). \end{array}$$

La suite exacte longue en homotopie, et le fait que $\mathbb{H}(R)$ soit un groupe sans torsion (car sous-groupe de $\mathbb{W}(R)$) implique que l'on a un isomorphisme naturel

$$\pi_n((K(\pi, n) \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \simeq \pi \otimes \mathbb{H}.$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Le lemme implique l'énoncé du théorème pour des espaces tronqués X , par une récurrence simple le long de la tour de Postnikov de X . En effet, on a pour tout $k \geq 3$ un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_k & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{k-1} & \longrightarrow & K(\pi_k, k+1), \end{array}$$

avec π_k un groupe abélien de type fini. Le théorème de Eilenberg-Moore A.1 s'applique, et donne comme précédemment un carré homotopiquement cocartésien sur les algèbres cosimpliciales de cohomologie. Par le lemme précédent, le diagramme induit sur leurs spectres est alors un carré homotopiquement cartésien de champs affines

$$\begin{array}{ccc} (X_k \otimes \mathbb{Z})^{uni} & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_{k-1} \otimes \mathbb{Z})^{uni} & \longrightarrow & K(\pi_k \otimes \mathbb{H}, k+1). \end{array}$$

La proposition s'en suit par récurrence et la suite exacte longue en homotopie.

Enfin, pour un espace simplement connexe de type fini X général, on écrit $X = \text{holim}_n X_n$ comme limite homotopique de ses tronqués. En particulier, on a $C^*(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{colim}_n C^*(X, \mathbb{Z})$, et donc $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni} \simeq \text{holim}_n (X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}$. Nous connaissons déjà la proposition pour chacun des X_n , et pour conclure il nous suffit donc de montrer que le morphisme naturel

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni} \longrightarrow (X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}$$

induit des isomorphismes sur les faisceaux d'homotopie π_i dès que $i \leq n$. Or, les préfaisceaux d'homotopie du champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ entre dans des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \pi_i^{pr}((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow \lim_n \pi_i^{pr}((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow \lim_n^1 \pi_{i+1}^{pr}((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow 0.$$

Comme le foncteur faisceau fpqc associé commute aux $\lim_n$ et $\lim_n^1$ (voir corollaire B.2), on trouve des suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow \lim_n \pi_i((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow \lim_n^1 \pi_{i+1}((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow 0.$$

Or, le système $n \mapsto \pi_{i+1}((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ est constant, de valeurs $\pi_{i+1}(X) \otimes \mathbb{H}$, dès que $n \geq i$, et ainsi le terme $\lim^1$ s'annule à l'aide du nouvelle application du corollaire B.2. On a donc

$$\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \simeq \lim_n \pi_i((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \simeq \pi_i((X_n \otimes \mathbb{Z})^{uni})$$

dès que $n \geq i$. □

Remarque 4.3 Les isomorphismes $\pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{H} \simeq \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ du théorème 4.1 sont, par observation, fonctoriels en X . En effet, ils sont construits de la manière suivante. On dispose, pour $i \geq 0$ fixé, d'un diagramme d'espaces

$$X \longrightarrow X_i \longleftarrow K(\pi_i, i)$$

où X_i est le i -ème tronqué de Postnikov de X . On en déduit alors d'un diagramme de faisceaux abéliens

$$\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \xrightarrow{c} \pi_i((X_i \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \xleftarrow{b} \pi_i((K(\pi_i, i) \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \xrightarrow{a} \pi_i(K(\pi_i \otimes \mathbb{H}, i)) \simeq \pi_i \otimes \mathbb{H}.$$

Les morphismes c et b sont ici induits par fonctorialité à partir du diagramme d'espaces ci-dessus. Le morphisme a est quand à lui construit à partir du morphisme naturel $K(\pi_i, i) \rightarrow K(\pi_i \otimes \mathbb{H}, i)$, en observant que le lemme 4.2 montre en particulier que $K(\pi_i \otimes \mathbb{H}, i)$ est un champ affine. Par propriété universelle de l'affinisation le morphisme $K(\pi_i, i) \rightarrow K(\pi_i \otimes \mathbb{H}, i)$ induit ainsi un morphisme $(K(\pi_i, i) \otimes \mathbb{Z})^{uni} \rightarrow K(\pi_i \otimes \mathbb{H}, i)$. De plus, le morphisme a est un isomorphisme d'après le lemme 4.2, et par construction est fonctoriel en le groupe π_i . Enfin, nous avons vu au cours de la preuve du théorème 4.1 que les morphismes b et c sont des isomorphismes. L'isomorphisme du théorème 4.1 est alors donné par $c^{-1}ba^{-1}$.

Un important corollaire du théorème 4.1 est le fait suivant. Remarquons pour cela que $\mathbb{H}$ est le groupe additif d'un faisceau en anneaux commutatifs, car $\mathbb{H}(R)$ s'identifie au sous-anneau de $\mathbb{W}(R)$ formé des vecteurs de Witt fixés par tous les Frobenius.

Corollaire 4.4 *Soit X un espace simplement connexe et de type fini, alors pour tout i le faisceau en groupes $\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ possède une structure naturelle de faisceaux en $\mathbb{H}$ -modules.*

Remarque 4.5 La structure de $\mathbb{H}$ -module du corollaire précédent est par définition celle induite par notre théorème 4.1. Malheureusement, l'isomorphisme $\pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{H} \simeq \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ de ce théorème est construit au cours de la preuve (voir remarque 4.3). Il serait intéressant de savoir démontrer le corollaire 4.4 de manière indépendante, afin à ce que le morphisme naturel $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ induise l'isomorphisme du théorème 4.1. Nous ne savons cependant pas comment démontrer que les faisceaux $\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ possèdent une structure naturelle de $\mathbb{H}$ -modules de manière directe.

Un second corollaire, important et que nous utiliserons dans la section suivante, et le phénomène de rigidité suivant. On note $A = \mathbb{W}_{p^\infty}(k)$ avec k une extension algébrique de $\mathbb{F}_p$. C'est un anneau de valuation discrète noethérien et complet de corps résiduel k . On note $\pi \in A$ une uniformisante de A .

Corollaire 4.6 *Soit X un espace simplement connexe et de type fini. Alors, pour entier n , les morphismes*

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(A) \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(A/\pi^n) \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(k)$$

sont des équivalences. En d'autres termes le champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$, restreint au petit site pro fini-étale de $\text{Spec } \hat{\mathbb{Z}}_p$ est un champ constant de fibre X_p le complété p -adique de l'espace X .

Preuve du corollaire : Tout d'abord, comme $A = \lim_n A/\pi^n$, et que cette limite peut être comprise comme une limite homotopique dans les anneaux cosimpliciaux, on a

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(A) \simeq \text{ho} \lim_n (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(A/\pi^n).$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout n le morphisme $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(A/\pi^n) \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(k)$ est une équivalence. Mais cela se déduit du théorème 4.1, du corollaire 2.3, et d'un dévissage de Postnikov standard. $\square$

5 Propriétés d'injectivité du foncteur d'affinisation

Pour terminer, nous allons étudier les propriétés de l' ∞ -foncteur d'affinisation

$$(- \otimes \mathbb{Z})^{uni} : \text{Top}_{\geq 1}^{tf} \longrightarrow \text{ChAff},$$

où $\text{Top}_{\geq 1}^{tf} \subset \text{Top}$ est la sous- ∞ -catégorie pleine des espaces simplement connexes et de type fini. Nous allons d'abord voir que ce foncteur n'est pas pleinement fidèle, en décrivant explicitement l'unité de l'adjonction

$$X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}).$$

L'anneau $\mathbb{Z}$ entre dans un carré cartésien d'anneaux commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{A}, \end{array}$$

où $\mathbb{A} := (\prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p) \otimes \mathbb{Q}$ est l'anneau des adèles. Ce carré est encore homotopiquement cartésien lorsque considéré dans l' ∞ -catégorie des anneaux cosimpliciaux, car il induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \oplus \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout champ affine F on a une décomposition naturelle

$$F(\mathbb{Z}) \simeq F(\mathbb{Q}) \times_{F(\mathbb{A})} \prod_p F(\hat{\mathbb{Z}}_p).$$

Supposons maintenant que $F = (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ soit l'affinisé d'un espace simplement connexe et de type fini. On sait que $\mathbb{H}$ devient naturellement isomorphe au groupe additif sur $Spec \mathbb{Q}$, et ainsi pour tout $\mathbb{Q}$ -algèbre R on a $\mathbb{H}(R) \simeq R$. Mieux, $\mathbb{G}_a$ ne possédant pas de cohomologie sur les schémas affines, le théorème 4.1 nous donne des isomorphismes de groupes abéliens

$$\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Q})) \simeq \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \quad \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{A})) \simeq \pi_i(X) \otimes \mathbb{A}.$$

Par ailleurs, le corollaire 4.6 implique que le champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$, restreint au petit site pro fini-étale de $Spec \hat{\mathbb{Z}}_p$, est un champ constant de fibre X_p . En particulier, on trouve une équivalence canonique pour tout premier p

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}}_p) \simeq X_p^{S^1},$$

où $X_p^{S^1}$ est l'espace des lacets libres dans X_p . On trouve ainsi une décomposition naturelle pour tout X

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}) \simeq X_{\mathbb{Q}} \times_{X_{\mathbb{A}}} \prod_p X_p^{S^1},$$

où $X_{\mathbb{Q}}$ est le rationalisé de X , X_p son complété p -adique et $X_{\mathbb{A}}$ est une notation pour $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{A})$.

La conclusion de cette discussion est l'énoncé suivant, qui calcule les groupes d'homotopie de l'espace $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$ en termes de ceux de X .

Corollaire 5.1 *Pour X un espace simplement connexe et de type fini on a des isomorphismes fonctoriels en X*

$$\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})) \simeq \pi_i(X) \oplus \prod_p \pi_{i+1}(X)_p^{\wedge},$$

où $M_p^{\wedge} = \lim_n M/p^n$ désigne la complétion p -adique d'un groupe abélien M .

Preuve : En effet, posons $F = (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$. La décomposition

$$F(\mathbb{Z}) \simeq F(\mathbb{Q}) \times_{F(\mathbb{A})} \prod_p F(\hat{\mathbb{Z}}_p)$$

induit une suite longue en homotopie de la forme

$$\pi_i(F(\mathbb{Z})) \longrightarrow \pi_i(F(\mathbb{Q})) \oplus \prod_p \pi_i(F(\hat{\mathbb{Z}}_p)) \longrightarrow \pi_i(F(\mathbb{A})).$$

Cette suite s'écrit aussi

$$\pi_i(F(\mathbb{Z})) \longrightarrow \pi_i(X)_{\mathbb{Q}} \oplus \prod_p \pi_i(X)_p^{\wedge} \oplus \prod_p \pi_{i+1}(X)_p^{\wedge} \longrightarrow \pi_i(X) \otimes \mathbb{A},$$

et donne ainsi lieu à des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \pi_i(F(\mathbb{Z})) \longrightarrow \pi_i(X)_{\mathbb{Q}} \oplus \prod_p \pi_i(X)_p^{\wedge} \oplus \prod_p \pi_{i+1}(X)_p^{\wedge} \longrightarrow \pi_i(X) \otimes \mathbb{A} \longrightarrow 0.$$

Comme le morphisme $\prod_p \pi_{i+1}(X)_p^{\wedge} \longrightarrow \pi_i(X) \otimes \mathbb{A}$ est trivial par construction, on en déduit le corollaire. $\square$

Une conséquence intéressante du corollaire précédent est la formule suivante, qui donne un calcul explicite des groupes de cohomologie $H_{fpqc}^i(Spec \mathbb{Z}, \mathbb{H})$.

Corollaire 5.2 *Pour tout groupe abélien de type fini M*

$$H^0(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, M \otimes \mathbb{H}) \simeq M \quad H_{fpqc}^i(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, M \otimes \mathbb{H}) = 0 \quad \forall i > 1$$

et

$$H_{fpqc}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, M \otimes \mathbb{H}) \simeq M \otimes \hat{\mathbb{Z}}.$$

Preuve du corollaire : On applique le corollaire 5.1 à $X = K(M, n)$ et on utilise la formule

$$\pi_i(K(A, n)(\mathbb{Z})) \simeq H_{fpqc}^{n-i}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, A)$$

pour tout faisceau abélien A . □

Pour terminer, nous revenons sur l'∞-foncteur $X \mapsto (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$ de l'∞-catégorie $Top_{\geq 1}^{tf}$ des espaces simplement connexes et de type fini vers Top . Nous avons vu qu'il est équivalent à l'∞-foncteur

$$X \mapsto X_{\mathbb{Q}} \times_{X_{\mathbb{A}}} \prod_p X_p^{S^1}.$$

Nous pouvons dire un peu plus. Tout d'abord, notons que le morphisme $\prod_p X_p^{S^1} \rightarrow X_{\mathbb{A}}$ possède en réalité une factorisation canonique

$$\prod_p X_p^{S^1} \rightarrow \prod_p X_p \rightarrow X_{\mathbb{A}},$$

où le premier morphisme est l'évaluation au point de base de S^1 . Pour voir cela on introduit l'anneau $\hat{\mathbb{Z}} := \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p$ où $\hat{\mathbb{Z}}_p \subset \hat{\mathbb{Z}}_p$ est l'extension étale maximale non-ramifiée. En d'autres termes $\hat{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{W}_{p^\infty}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Les Frobenius fournissent un automorphisme Fr de l'anneau $\hat{\mathbb{Z}}$. Nous noterons aussi $\bar{\mathbb{A}} := \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$. Notons immédiatement que l'on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{A}} \xrightarrow{1-Fr} \bar{\mathbb{A}} \longrightarrow 0.$$

On considère maintenant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\bar{\mathbb{A}}). \end{array}$$

Le Frobenius opère de manière compatible sur les membres de droites, et nous noterons par $(-)^{Fr}$ les points fixes homotopiques de cette action.

Lemme 5.3 *Soit R une $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative et $Fr : R \rightarrow R$ un endomorphisme de R . On suppose que $1 - Fr : R \rightarrow R$ est surjectif et on note $R^{Fr} \subset R$ le sous-anneau des points fixes de F sur R . Alors, pour tout espace simplement connexe de type fini X , le morphisme naturel*

$$(X \otimes \mathbb{Z})(R^{Fr}) \rightarrow (X \otimes \mathbb{Z})(R)^{Fr}$$

est une équivalence faible.

Preuve du lemme : On connaît les groupes d'homotopie de $(X \otimes \mathbb{Z})(R)$ et $(X \otimes \mathbb{Z})(R^{Fr})$, qui ne sont autre que les $\pi_i(X) \otimes R$ et $\pi_i(X) \otimes (R^{Fr})$. Le lemme se vérifie alors directement en considérant la suite exacte longue en homotopie pour les points fixes homotopiques de Fr

$$\dots \longrightarrow \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})(R)^{Fr}) \longrightarrow \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})(R)) \xrightarrow{1-Fr} \pi_i((X \otimes \mathbb{Z})(R)) \longrightarrow \pi_{i-1}((X \otimes \mathbb{Z})(R)^{Fr})$$

qui montre que $\pi_i((X \otimes \mathbb{Z})(R)^{Fr})$ s'identifie canoniquement à $\pi_i(X) \otimes (R^{Fr})$. $\square$

Le lemme précédent nous dit que le morphisme naturel

$$(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{A}) \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\bar{\mathbb{A}})^{Fr}$$

est une équivalence. Comme nous savons que l'action de Frobenius est canoniquement triviale sur $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}})$ nous en déduisons un morphisme naturel ϕ qui fait commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\hat{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & \searrow \phi & \downarrow \\ (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\bar{\mathbb{A}}). \end{array}$$

Ce morphisme ϕ fournit la factorisation canonique cherchée.

Nous pouvons donc maintenant écrire de manière fonctorielle en X un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} & & (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \prod_p X_p^{S^1} \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & \prod_p X_p \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & X_{\mathbb{A}}. \end{array}$$

Par inspection de la suite exacte longue en homotopie, on voit que le morphisme α est en réalité une équivalence. Nous avons donc montré le corollaire suivant.

Corollaire 5.4 *Pour tout $X \in Top_{\geq 1}^{tf}$ le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$ possède une rétraction*

$$r : (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}) \longrightarrow X,$$

fonctorielle en X .

On déduit de ce corollaire le fait important suivant.

Corollaire 5.5 *L^∞ -foncteur de schématisation*

$$(- \otimes \mathbb{Z})^{uni} : Top_{\geq 1}^{tf} \longrightarrow ChAff$$

possède les propriétés suivantes.

1. Il est injectif sur les classes d'équivalences d'objets : deux espaces simplement connexes et de type fini X et Y sont faiblement équivalents si et seulement si les champs $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ et $(Y \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ sont équivalents.
2. Pour deux espaces X et Y simplement connexes et de type fini, le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$Map_{Top}(X, Y) \longrightarrow Map_{St_{\mathbb{Z}}}((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}, (Y \otimes \mathbb{Z})^{uni})$$

possède une rétraction, et en particulier est injectif en homotopie.

Preuve du corollaire : Commençons par montrer (2). Notons $i_X : X \longrightarrow (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$ l'unité de l'adjonction, et $r_X : (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}) \longrightarrow X$ la rétraction du corollaire 5.4. On définit

$$R : Map_{St_{\mathbb{Z}}}((X \otimes \mathbb{Z})^{uni}, (Y \otimes \mathbb{Z})^{uni}) \longrightarrow Map_{Top}(X, Y)$$

par la formule $R(f) := r_Y \circ f \circ i_X$. Pour (1), nous prétendons que la formule pour $R(f)$ ci-dessus préserve les morphismes induits en homotopie au sens suivant. Le morphisme

$$f : (X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z}) \longrightarrow (Y \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$$

induit d'après le théorème 4.1 un morphisme sur les faisceaux d'homotopie

$$\pi_*(f) : \pi_*(X) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{H}.$$

De même, $R(f) : X \longrightarrow Y$ induit une application en homotopie et donc à son tour un morphisme

$$\pi_*(R(f)) : \pi_*(X) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{H}.$$

Nous affirmons que les deux morphismes $\pi_*(f)$ et $\pi_*(R(f))$ sont égaux, ce qui se voit par construction de la rétraction R .

Ainsi, si f est une équivalence, $\pi_*(f)$ est un isomorphisme. Or, le foncteur qui à un groupe abélien de type fini M associe le faisceau abélien $M \otimes \mathbb{H}$ est conservatif, comme cela se voit par exemple en appliquant le foncteur des sections globales sur $Spec \mathbb{Z}$ (voir corollaire 5.2). $\square$

Remarque 5.6 La discussion menant au corollaire 5.4 montre aussi que l' ∞ -foncteur $Top_{\geq 1}^{tf} \longrightarrow Top$, qui à X associe $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}(\mathbb{Z})$, est équivalent à

$$X \mapsto X \times_{\prod_p X_p} \prod_p X_p^{S^1}.$$

A Le théorème d'Eilenberg-Moore

Dans cet appendice nous rappelons le théorème d'Eilenberg-Moore (voir [15]) et sa version légèrement améliorée en termes d'algèbres cosimpliciales commutatives, dont nous redonnons une preuve. Il sera utilisé de manière essentielle au cours de la preuve du théorème 4.1 afin de montrer que l'affinisation d'espaces simplement connexes et de type fini commute avec les décompositions de Postnikov.

Nous rappelons qu'un espace X est dit de *type fini*, s'il est faiblement équivalent à un CW complexe ne possédant qu'un nombre fini de cellules en chaque degré. Un espace connexe et simplement connexe est de type fini si et seulement si tous ses groupes d'homotopie sont de type fini.

Theorème A.1 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

un carré homotopiquement cartésien d'espaces topologiques. On suppose de plus que les conditions suivantes sont satisfaites.

1. *S est un espace (connexe et) simplement connexe.*
2. *La fibre homotopique de $X \longrightarrow S$ est un espace de type fini.*

Alors, le morphisme naturel d'algèbres commutatives cosimpliciales

$$C^*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} C^*(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(Z, \mathbb{Z})$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve : Représentons le diagramme d'espaces par un diagramme de CW complexes tel que tous les morphismes soient des fibrations de Serre. On se place dans l' ∞ -catégorie $\mathcal{D}(X)$ des complexes de faisceaux abéliens sur X munie de sa structure symétrique monoïdale usuelle. Notons

$$\pi : Z \longrightarrow S \quad f : X \longrightarrow S \quad g : Y \longrightarrow S$$

les projections. L' ∞ -foncteur d'images directes π_* est lax monoïdal, car adjoint à droite de π^* qui est monoïdal, et l'on dispose ainsi d'un morphisme naturel dans $\mathcal{D}(S)$

$$f_*(\mathbb{Z}) \otimes^{\mathbb{L}} g_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_*(\mathbb{Z}).$$

Sur un ouvert contractile $U \subset S$, ce morphisme s'identifie en un morphisme entre objets constants qui n'est autre que le morphisme de Kunneth

$$C^*(X_s, \mathbb{Z}) \otimes^{\mathbb{L}} C^*(Y_s, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(Z_s, \mathbb{Z}),$$

où X_s , Y_s et Z_s sont les fibres de X , Y et Z au-dessus d'un point fixé $s \in U$. D'après l'hypothèse (2) il s'agit donc d'un quasi-isomorphisme, et ainsi le morphisme naturel induit donc une équivalence dans $\mathcal{D}(S)$

$$f_*(\mathbb{Z}) \otimes^{\mathbb{L}} g_*(\mathbb{Z}) \simeq \pi_*(\mathbb{Z}).$$

Nous considérons maintenant l' ∞ -foncteur de sections globales sur S $\Gamma : \mathcal{D}(S) \longrightarrow \mathcal{D}(*)$, qui est aussi un ∞ -foncteur lax monoïdal. En particulier, il induit un nouvel ∞ -foncteur lax monoïdal

$$\Gamma : \mathcal{D}(S) \longrightarrow C^*(S, \mathbb{Z}) - Mod,$$

où $C^*(S, \mathbb{Z})$ est ici considéré comme une E_∞ -algèbre dans $\mathcal{D}(*)$ et $C^*(S, \mathbb{Z}) - Mod$ et son ∞ -catégorie monoïdale des modules dans $\mathcal{D}(*)$. L'équivalence ci-dessus fournit ainsi un morphisme naturel

$$\Gamma(f_*(\mathbb{Z})) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \Gamma(g_*(\mathbb{Z})) \longrightarrow \Gamma(f_*(\mathbb{Z}) \otimes^{\mathbb{L}} g_*(\mathbb{Z})) \simeq \Gamma(\pi_*(\mathbb{Z})).$$

Ce morphisme dans $\mathcal{D}(\ast)$ s'identifie au morphisme de l'énoncé du théorème. Pour montrer qu'il s'agit d'une équivalence il suffit donc de montrer que le morphisme

$$\Gamma(f_*(\mathbb{Z})) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \Gamma(g_*(\mathbb{Z})) \longrightarrow \Gamma(f_*(\mathbb{Z}) \otimes^{\mathbb{L}} g_*(\mathbb{Z}))$$

est une équivalence.

Pour cela, on considère l'énoncé général suivant : étant donnés E et F des objets de $\mathcal{D}(S)$, le morphisme

$$\Gamma(E) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(E \otimes^{\mathbb{L}} F)$$

est une équivalence. Cet énoncé est trivialement satisfait pour E le faisceau constant $\mathbb{Z}$ (et tout F), car par construction $\Gamma(\mathbb{Z}) \simeq C^*(S, \mathbb{Z})$ comme $C^*(S, \mathbb{Z})$ -modules. Par stabilité l'énoncé est vrai pour n'importe quel objets E et F , avec E appartenant à l'enveloppe triangulée de l'objet $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{D}(S)$. Enfin, supposons que E soit un objet de $\mathcal{D}(S)$ vérifiant les hypothèses suivantes.

1. Les faisceaux de cohomologie $H^i(E)$ s'annulent pour $i < 0$.
2. Les faisceaux de cohomologie $H^i(E)$ sont localement constants (et donc constants car S est 1-connexe) de fibre de type fini pour tout i .

On peut alors écrire E comme une colimite filtrante de ses tronqués $E \simeq \text{colim}_n E_{\leq n}$. On a alors clairement $\text{colim}_n \Gamma(E_{\leq n}) \simeq \Gamma(E)$. De même, si $F \in \mathcal{D}(S)$ est un second objet satisfaisant la condition (1) ci-dessus, alors on a $\text{colim}_n (E_{\leq n} \otimes^{\mathbb{L}} F) \simeq \Gamma(E \otimes^{\mathbb{L}} F)$. Ainsi, pour deux tels E et F le morphisme

$$\Gamma(E) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(E \otimes^{\mathbb{L}} F)$$

est équivalent au morphisme

$$\text{colim}_n (\Gamma(E_{\leq n}) \otimes_{C^*(S, \mathbb{Z})}^{\mathbb{L}} \Gamma(F)) \longrightarrow \text{colim}_n \Gamma(E_{\leq n} \otimes^{\mathbb{L}} F),$$

qui est donc une équivalence car chacun des $E_{\leq n}$ est dans l'enveloppe triangulée de $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{D}(S)$.

Cela démontre le théorème, en prenant $E = f_*\mathbb{Z}$, resp. $F = g_*\mathbb{Z}$, qui satisfont bien aux conditions (1) – (2), resp. condition (1), d'après nos hypothèses sur le morphisme f . $\square$

B Le topos fpqc

Nous rappelons ici quelques faits sur le topos fpqc, qui demande certains soins de nature ensemblistes. Il s'agit d'énoncés affirmant que les limites le long de la catégorie $\mathbb{N}^+$ (les entiers naturels muni de l'ordre inverse de l'ordre naturel) se comportent essentiellement comme dans le topos des ensembles. Ces résultats seront utilisés de manière essentielle pour contrôler certaines limites de champs (voir par exemple la preuve de la proposition 3.1).

Nous notons $\mathbb{U} \in \mathbb{V}$ deux univers de Grothendieck, et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{U}$ qui est infini.

Soit Aff la catégorie des schémas affines qui sont éléments de $\mathbb{U}$. Par choix des univers Aff est une catégorie élément de $\mathbb{V}$. La catégorie des (gros) préfaisceaux sur Aff est par définition

$$\widehat{Aff} := Fun(Aff^{op}, Ens_{\mathbb{V}}),$$

la catégorie des foncteurs de Aff^{op} à valeurs dans la catégorie des ensembles éléments de $\mathbb{V}$. La catégorie Aff est munie d'une topologie de Grothendieck pour laquelle les familles couvrantes $\{Spec A_i \rightarrow Spec A\}_{i \in I}$ dans Aff ($I \in \mathbb{U}$) sont celles telles que $Spec A_i \rightarrow Spec A$ est plat pour tout i , et de plus il existe un sous-ensemble fini $I' \subset I$ avec $\coprod_{i \in I'} Spec A_i \rightarrow Spec A$ surjectif. Cette topologie est la topologie $fpqc$. On note $Aff^{\sim, fpqc} \subset \widehat{Aff}$ la sous-catégorie pleine formée des faisceaux fpqc. C'est encore une catégorie $\mathbb{V}$ -petite, qui possède tout type de limites et colimites $\mathbb{U}$ -petites.

On dispose d'une adjonction

$$a : \widehat{Aff} \rightleftarrows Aff^{\sim, fpqc} : j$$

où l'adjoint à droite j est le foncteur d'inclusion, et l'adjoint à gauche a est le foncteur de faisceau-tisation fpqc.

Une des propriétés remarquables du topos $Aff^{\sim, fpqc}$ est la suivante.

Proposition B.1 *Le foncteur a commute aux limites dénombrables.*

Preuve : On sait que le foncteur a est exact, et il suffit donc de montrer qu'il commute aux produits dénombrables. Pour cela, soit $\{F_i\}_{i \geq 0}$ une famille dénombrable d'objets de $\widehat{Aff}$ et considérons le morphisme de faisceaux

$$\alpha : a(\prod_i F_i) \longrightarrow \prod_i a(F_i).$$

On commence par remarquer que ce morphisme est un épimorphisme. En effet, soit $X \in Aff$ et $(x_i)_{i \geq 0} \in \prod_i a(F_i)(X)$ une section de $\prod_i a(F_i)$ sur X . Pour tout $i \geq 0$, il existe un recouvrement fpqc $u_i : Y_i \rightarrow X$ et un élément $y_i \in F_i(Y_i)$ tel que l'application canonique $F_i(Y_i) \rightarrow a(F_i)(Y_i)$ envoie y_i sur $u_i^*(x_i)$.

Notons $Y_i = Spec A_i$, de telle sorte que A_i soit une A -algèbre fidèlement plate. On considère la somme infinie dans la catégorie des A -algèbres commutatives $B := \otimes_{i \geq 0} A_i$. Comme B peut aussi s'écrire comme une colimite le long de $\mathbb{N}$, du système $(n \mapsto \otimes_{0 \leq i \leq n} A_i)$, on voit que B est encore une A -algèbre fidèlement plate. On note $Z = Spec B$, qui est aussi le produit fibré de la familles des $Y_i \rightarrow X$ dans Aff , ainsi que $p_i : Z \rightarrow Y_i$ et $p : Z \rightarrow X$ les projections. Alors, on voit que l'élément $p^*(x_i)_{i \geq 0} \in \prod_i a(F_i(Z))$ est l'image de l'élément $(p_i^*(y_i))_{i \geq 0} \in \prod_i F_i(Z)$ par le morphisme naturel $\prod_i F_i \rightarrow \prod_i a(F_i)$. Ceci montre que le morphisme α est un épimorphisme.

On procède de manière similaire pour voir que α est un monomorphisme de faisceaux. $\square$

La proposition B.1 implique en particulier que les produits dénombrables sont exacts dans la catégorie des faisceaux abéliens. De cela découle le corollaire suivant (voir aussi [1] pour la notion de topos *replete* dont le topos fpqc est un exemple).

Corollaire B.2 *Soit*

$$E_* : \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_0$$

une tour dénombrable de préfaisceaux abéliens sur le site fpqc des schémas affines. Alors, les morphismes naturels

$$a(\lim_n E_n) \longrightarrow \lim_n a(E_n) \quad a(\lim_n^1 E_n) \longrightarrow \lim_n^1 a(E_n)$$

sont des isomorphismes de faisceaux abéliens (où les membres de droites sont calculés dans la catégorie des faisceaux *fpqc* abéliens et ceux de gauches dans la catégorie des préfaisceaux abéliens). De plus $\lim_n^i a(E_n) = 0$ pour tout $i > 1$.

Les résultats précédents possèdent une version homotopique pour les champs. On considère l'adjonction d' ∞ -catégories

$$a : \text{Fun}(\text{Aff}^{\text{op}}, \text{Top}_{\mathbb{V}}) \rightleftarrows \text{St}_{\mathbb{Z}} : j,$$

où j est l'inclusion et a le foncteur champ associé, que l'on sait être exact. Nous travaillons ici avec des champs hypercomplets (voir [11]), c'est à dire que les équivalences faibles de détectent sur les faisceaux d'homotopie. Ainsi, la proposition B.1 implique-t-elle que l' ∞ -foncteur a commute aux produits dénombrables, et donc à tout type de limites homotopiques dénombrables. Une conséquence importante est le fait que l' ∞ -foncteur

$$\text{Top}_{\mathbb{V}} \longrightarrow \text{St}_{\mathbb{Z}}$$

qui à un espace associe le champ constant correspondant, commute avec les limites homotopiques dénombrables.

Le cas qui nous intéressera particulièrement est le corollaire suivant, qui est une nouvelle interprétation des résultats de [16].

Corollaire B.3 *Soit X un espace simplement connexe et de type fini. Soit $X \longrightarrow X_p$ son complété p -adique et notons encore X_p le champ constant associé. Alors, pour tout corps de caractéristique $p > 0$, il existe une équivalence canonique de champs *fpqc* sur $\text{Spec } k$*

$$X_p \simeq (X \otimes k)^{\text{uni}}.$$

Preuve du corollaire : Comme $(X \otimes k)^{\text{uni}}$ est obtenu par changement de base de $(X \otimes \mathbb{F}_p)^{\text{uni}}$ il suffit de traiter le cas $k = \mathbb{F}_p$. On rappelle que X_p est caractérisé par le fait que le morphisme induit en homotopie $\pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X_p)$ fait de $\pi_i(X_p)$ le complété p -adique de $\pi_i(X)$. De plus, le morphisme $X \longrightarrow X_p$ induit une équivalence sur les k -algèbres cosimpliciales de cohomologie

$$C^*(X_p, \mathbb{F}_p) \simeq C^*(X, \mathbb{F}_p).$$

Ceci nous donne, par adjonction, le morphisme canonique

$$X_p \longrightarrow \mathbb{R}\text{Spec } C^*(X_p, \mathbb{F}_p) \simeq (X \otimes \mathbb{F}_p)^{\text{uni}}.$$

Sur les groupes d'homotopie, ce morphisme induit le morphisme canonique

$$\pi_i(X_p) \longrightarrow \lim_n (\pi_i(X) \otimes \mathbb{Z}/p^n),$$

où la limite de droite est prise dans la catégorie des faisceaux *fpqc* et le membre de gauche est le faisceau constant de fibre le complété p -adique de $\pi_i(X)$. Le fait que ce morphisme soit un isomorphisme de faisceaux se déduit de la proposition B.1. $\square$

Références

- [1] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. The pro-étale topology for schemes. *Astérisque*, (369) :99–201, 2015.
- [2] P. Cartier. Groupes algébriques et groupes formels. In *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962)*, pages 87–111. Librairie Universitaire, Louvain ; GauthierVillars, Paris, 1962.
- [3] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice it Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.
- [4] Torsten Ekedahl. On minimal models in integral homotopy theory. volume 4, pages 191–218. 2002. The Roos Festschrift volume, 1.
- [5] Jesse Elliott. Binomial rings, integer-valued polynomials, and λ -rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 207(1) :165–185, 2006.
- [6] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.
- [7] Alexander Grothendieck. Pursuing stacks. *Achive Grothendieck cote 134-7* : <https://grothendieck.umontpellier.fr/archives-grothendieck/#>.
- [8] Michiel Hazewinkel. Witt vectors. I. In *Handbook of algebra. Vol. 6*, volume 6 of *Handb. Algebr.*, pages 319–472. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.
- [9] Lars Hesselholt. Lecture notes on witt vectors. <https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/papers/s03/wittsurvey.pdf>.
- [10] Jacob Lurie. Higher algebra. Accessible à <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- [11] Jacob Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [12] Michael A. Mandell. E_∞ algebras and p -adic homotopy theory. *Topology*, 40(1) :43–94, 2001.
- [13] Michael A. Mandell. Cochains and homotopy type. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (103) :213–246, 2006.
- [14] Tasos Moulinos, Marco Robalo, and Bertrand Toën. A universal HKR theorem. *arXiv :1906.00118*, 2019.
- [15] Larry Smith. Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129 :58–93, 1967.
- [16] Bertrand Toën. Champs affines. *Selecta Math. (N.S.)*, 12(1) :39–135, 2006.