

Catégories et formule des traces en géométrie algébrique

Bertrand Toën
(CNRS, Toulouse)

Amiens, Janvier 2019

Objectif: de l'utilité des catégories en géométrie

Objectif: de l'utilité des catégories en géométrie algébrique.

Objectif: de l'utilité des catégories en géométrie algébrique.

Concentre sur l'étude topologique des variétés algébriques, et la conjecture du "conducteur de Bloch".

Topologie des variétés algébriques

Topologie des variétés algébriques

Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$

$$X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n.$$

Topologie des variétés algébriques

Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$

$$X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n.$$

On supposera que X est lisse: e.g. le critère jacobien s'applique

$$\text{rang} \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j} \text{ est maximal } \forall x \in X$$

Topologie des variétés algébriques

Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$

$$X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n.$$

On supposera que X est lisse: e.g. le critère jacobien s'applique

$$\text{rang} \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j} \text{ est maximal } \forall x \in X$$

Problème: lire la topologie de l'espace X en fonction des F_i .

Topologie des variétés algébriques

Quelques réponses typiques en basse dimension.

Topologie des variétés algébriques

Quelques réponses typiques en basse dimension.

- $(n = 1, p = 1)$: X est un ensemble fini de cardinal $\deg(F_1)$ compté avec multiplicités.

Topologie des variétés algébriques

Quelques réponses typiques en basse dimension.

- $(n = 1, p = 1)$: X est un ensemble fini de cardinal $\deg(F_1)$ compté avec multiplicités.
- $(n = 2 \text{ and } p = 1)$: X est une surface de Riemann compacte de genre

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad d = \deg(F_1).$$

Cubique plane: tore de dimension 2.

Topologie des variétés algébriques

Quelques réponses typiques en basse dimension.

- $(n = 1, p = 1)$: X est un ensemble fini de cardinal $\deg(F_1)$ compté avec multiplicités.
- $(n = 2 \text{ and } p = 1)$: X est une surface de Riemann compacte de genre

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad d = \deg(F_1).$$

Cubique plane: tore de dimension 2.

- Si $n = 3$, $p = 1$ et $\deg(F_1) = 4$, alors $\chi(X) = 24$.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler

$$\chi(X) \in \mathbb{Z}$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler

$$\chi(X) \in \mathbb{Z}$$

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler

$$\chi(X) \in \mathbb{Z}$$

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Combinatoirement: $\chi(X) = \sum_i (-1)^i N_i$ avec N_i = nombre de faces de dimension i dans une triangulation de X .

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler

$$\chi(X) \in \mathbb{Z}$$

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Combinatoirement: $\chi(X) = \sum_i (-1)^i N_i$ avec N_i = nombre de faces de dimension i dans une triangulation de X .

Exemples:

- X un ensemble fini $\chi(X) = \text{Card}(X)$.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler
 $\chi(X) \in \mathbb{Z}$

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Combinatoirement: $\chi(X) = \sum_i (-1)^i N_i$ avec N_i = nombre de faces de dimension i dans une triangulation de X .

Exemples:

- X un ensemble fini $\chi(X) = \text{Card}(X)$.
- X une surface de Riemann de genre g $\chi(X) = 2 - 2g$.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Un invariant topologique simple: caractéristique d'Euler
 $\chi(X) \in \mathbb{Z}$

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Combinatoirement: $\chi(X) = \sum_i (-1)^i N_i$ avec N_i = nombre de faces de dimension i dans une triangulation de X .

Exemples:

- X un ensemble fini $\chi(X) = \text{Card}(X)$.
- X une surface de Riemann de genre g $\chi(X) = 2 - 2g$.
- $\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = n + 1$.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

*L'entier $\chi(X)$ peut se calculer de manière **algébrique**.*

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

L'entier $\chi(X)$ peut se calculer de manière *algébrique*.

Cas affine:

$$Y = \{x \in \mathbb{C}^n / P_i(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n \quad P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

L'entier $\chi(X)$ peut se calculer de manière *algébrique*.

Cas affine:

$$Y = \{x \in \mathbb{C}^n / P_i(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n \quad P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

$$\mathcal{O}(Y) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (P_1, \dots, P_p)$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

L'entier $\chi(X)$ peut se calculer de manière *algébrique*.

Cas affine:

$$Y = \{x \in \mathbb{C}^n / P_i(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n \quad P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

$$\mathcal{O}(Y) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (P_1, \dots, P_p)$$

On considère Ω_Y^q l'espace des q -formes différentielles sur Y :

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

L'entier $\chi(X)$ peut se calculer de manière *algébrique*.

Cas affine:

$$Y = \{x \in \mathbb{C}^n / P_i(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n \quad P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

$$\mathcal{O}(Y) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (P_1, \dots, P_p)$$

On considère Ω_Y^q l'espace des q -formes différentielles sur Y : le $\mathcal{O}(Y)$ -module librement engendré par les symboles $d(a_1) \wedge \dots \wedge d(a_q)$ avec $a_i \in \mathcal{O}(Y)$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

avec les relations standards

① (Leibniz)

$$\begin{aligned} d(a_1) \wedge \dots \wedge d(a_i b_i) \wedge \dots \wedge d(a_q) = \\ a_i d(a_1) \wedge \dots \wedge d(b_i) \wedge \dots \wedge d(a_q) + b_i d(a_1) \wedge \dots \wedge d(a_i) \wedge \dots \wedge d(a_q) \end{aligned}$$

② (Linearité)

$$\begin{aligned} d(a_1) \wedge \dots \wedge d(\lambda a_i) \wedge \dots \wedge d(a_q) = \\ \lambda d(a_1) \wedge \dots \wedge d(a_i) \wedge \dots \wedge d(a_q) \quad \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

③ (Anti-symétrie)

$$d(a_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge d(a_{\sigma(q)}) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} d(a_1) \wedge \dots \wedge d(a_q)$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

En général: on recouvre X par des affines

$$U_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n / x_i \neq 0\} \cap X \subset X \quad 0 \leq i \leq n$$

$$U_{i_0, \dots, i_m} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_m}$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

En général: on recouvre X par des affines

$$U_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n / x_i \neq 0\} \cap X \subset X \quad 0 \leq i \leq n$$

$$U_{i_0, \dots, i_m} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_m}$$

On recolte les Ω_Y^q par un complexe de Čech $C^*(X, \Omega^q)$

$$\begin{aligned} \prod_i \Omega_{U_i}^q \longrightarrow \prod_{i < j} \Omega_{U_{i,j}}^q \longrightarrow \dots \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_m} \Omega_{U_{i_0, \dots, i_m}}^q \longrightarrow \\ \dots \longrightarrow \Omega_{U_{0, \dots, n}}^q \end{aligned}$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

En général: on recouvre X par des affines

$$U_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n / x_i \neq 0\} \cap X \subset X \quad 0 \leq i \leq n$$

$$U_{i_0, \dots, i_m} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_m}$$

On recolte les Ω_Y^q par un complexe de Čech $C^*(X, \Omega^q)$

$$\begin{aligned} \prod_i \Omega_{U_i}^q \longrightarrow \prod_{i < j} \Omega_{U_{i,j}}^q \longrightarrow \dots \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_m} \Omega_{U_{i_0, \dots, i_m}}^q \longrightarrow \\ \dots \longrightarrow \Omega_{U_{0, \dots, n}}^q \end{aligned}$$

$$H^p(X, \Omega_X^q) := H^p(C^*(X, \Omega^q)) \quad (\mathbb{C} - \text{espace vectoriel})$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

Les espaces $H^p(X, \Omega_X^q)$ sont tous de dimension finie, et on a

$$\chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \Omega_X^q).$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Théorème (Gauss-Bonnet, Riemann-Roch ...)

Les espaces $H^p(X, \Omega_X^q)$ sont tous de dimension finie, et on a

$$\chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \Omega_X^q).$$

Invariant topologique = Invariant algébrique

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Cette formule reste vraie sur un corps (algébriquement clos) k quelconque.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Cette formule reste vraie sur un corps (algébriquement clos) k quelconque. Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in k[X_0, \dots, X_n]$
 $X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$.

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Cette formule reste vraie sur un corps (algébriquement clos) k quelconque. Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in k[X_0, \dots, X_n]$
 $X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$.

Les nombres de Betti de X sont définis par la cohomologie étale $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, des $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels de dimension finie.

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Cette formule reste vraie sur un corps (algébriquement clos) k quelconque. Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in k[X_0, \dots, X_n]$
 $X := \{(x_0, \dots, x_n) / F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$.

Les nombres de Betti de X sont définis par la cohomologie étale $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, des $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels de dimension finie.

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Théorème (Grothendieck)

$$\chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_k H^p(X, \Omega_X^q)$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Attention: En général $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q)$ n'ont pas la même dimension !

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Attention: En général $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q)$ n'ont pas la même dimension !

Formule surprenante car compare dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ et dimension sur k .

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Attention: En général $H_{\text{et}}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q)$ n'ont pas la même dimension !

Formule surprenante car compare dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ et dimension sur k . C'est un cas particulier de la formule des traces de Grothendieck:

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Attention: En général $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q)$ n'ont pas la même dimension !

Formule surprenante car compare dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ et dimension sur k . C'est un cas particulier de la formule des traces de Grothendieck: $f \circ X$ endomorphisme algébrique de X .

$$\sum_i (-1)^i \text{Trace}(f : H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)) = [\Gamma_f \cdot \Delta_X]$$

Caractéristique d'Euler des variétés algébriques

Attention: En général $H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q)$ n'ont pas la même dimension !

Formule surprenante car compare dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ et dimension sur k . C'est un cas particulier de la formule des traces de Grothendieck: $f \circ X$ endomorphisme algébrique de X .

$$\sum_i (-1)^i \text{Trace}(f : H_{et}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)) = [\Gamma_f \cdot \Delta_X]$$

$[\Gamma_f \cdot \Delta_X]$ est le nombre d'intersection du graphe de f avec la diagonale dans $X \times X$. Cas $f = id$ retrouve la formule pour $\chi(X)$.

Topologie des familles de variétés

Les variétés algébriques arrivent souvent en familles et tendent à dégénérer vers des variétés avec **singularités**.

Topologie des familles de variétés

Les variétés algébriques arrivent souvent en familles et tendent à dégénérer vers des variétés avec **singularités**.

- Espaces de modules sont en général non-compacts.
Compactifications naturelles en rajoutant des variétés singulières à l'infini (e.g. $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$).

Topologie des familles de variétés

Les variétés algébriques arrivent souvent en familles et tendent à dégénérer vers des variétés avec **singularités**.

- Espaces de modules sont en général non-compacts. Compactifications naturelles en rajoutant des variétés singulières à l'infini (e.g. $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$).
- Aspects arithmétiques: variétés algébriques définies sur des anneaux d'entiers $\mathcal{O}_K$ d'un corps de nombres $K/\mathbb{Q}$. Modulo p donnent des variétés sur des corps finis. "Mauvaise réduction" lorsque celles-ci sont singulières.

Topologie des familles de variétés

Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in A[X_0, \dots, X_n]$ avec $A = \mathcal{O}(S)$ l'anneau des fonctions sur un espace de paramètres S (e.g. une autre variété).

Topologie des familles de variétés

Polynômes homogènes $F_1, \dots, F_p \in A[X_0, \dots, X_n]$ avec $A = \mathcal{O}(S)$ l'anneau des fonctions sur un espace de paramètres S (e.g. une autre variété).

$$X := \{(x_0, \dots, x_n, s) / F_i(x, s) = 0\} \subset \mathbb{P}^n \times S.$$

"Famille de variétés paramétrées par S ". Pour tout point $s \in S$, on a $X_s \subset \mathbb{P}_{k(s)}^n$ une variété algébrique définie sur le corps résiduel $k(s)$.

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.
- $A = k[[t]]$ S est un disque formel sur un corps k .

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.
- $A = k[[t]]$ S est un disque formel sur un corps k .
- $A = \mathbb{Z}_p$ S est un disque p -adique.

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.
- $A = k[[t]]$ S est un disque formel sur un corps k .
- $A = \mathbb{Z}_p$ S est un disque p -adique.

$S = \operatorname{Spec} A$ pour A un anneau de valuation discrète complet.
 S possède deux points

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" := *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.
- $A = k[[t]]$ S est un disque formel sur un corps k .
- $A = \mathbb{Z}_p$ S est un disque p -adique.

$S = \operatorname{Spec} A$ pour A un anneau de valuation discrète complet.
 S possède deux points

- Le point **spécial** $\mathfrak{o} \in S$ ($A \rightarrow A/\mathfrak{m} = k$ corps résiduel).

Topologie des familles de variétés

On se concentre sur le cas où S est un "petit disque" $:=$ *trait henselien*.

Exemples typiques

- $A = \mathbb{C}[[t]]$ S est un disque complexe formel.
- $A = k[[t]]$ S est un disque formel sur un corps k .
- $A = \mathbb{Z}_p$ S est un disque p -adique.

$S = \operatorname{Spec} A$ pour A un anneau de valuation discrète complet.
 S possède deux points

- Le point **spécial** $\mathfrak{o} \in S$ ($A \rightarrow A/\mathfrak{m} = k$ corps résiduel).
- Le point **générique** $\eta \in S$ ($K := k(\eta) = \operatorname{Frac}(A)$ corps des fractions).

Topologie des familles de variétés

$$X := \{(x_0, \dots, x_n, s) / F_i(x, s) = 0\} \subset \mathbb{P}^n \times S.$$

Deux variétés algébriques associées

- La fibre **spéciale** $X_{\bar{k}}$.
- La fibre **générique** $X_{\bar{K}}$.

Topologie des familles de variétés

$$X := \{(x_0, \dots, x_n, s) / F_i(x, s) = 0\} \subset \mathbb{P}^n \times S.$$

Deux variétés algébriques associées

- La fibre **spéciale** $X_{\bar{k}}$.
- La fibre **générique** $X_{\bar{K}}$.

Problème: comprendre le changement de **topologie** entre $X_{\bar{K}}$ et $X_{\bar{k}}$.

Topologie des familles de variétés

$$X := \{(x_0, \dots, x_n, s) / F_i(x, s) = 0\} \subset \mathbb{P}^n \times S.$$

Deux variétés algébriques associées

- La fibre **spéciale** $X_{\bar{k}}$.
- La fibre **générique** $X_{\bar{K}}$.

Problème: comprendre le changement de **topologie** entre $X_{\bar{k}}$ et $X_{\bar{K}}$.

Un invariant simple: comparer $\chi(X_{\bar{k}})$ et $\chi(X_{\bar{K}})$.

Caractéristique d'Euler des familles de variétés

Lorsque $X \rightarrow S$ est une submersion (i.e. $X_{\bar{K}}$ et $X_{\bar{k}}$ sont lisses), alors

$$\chi(X_{\bar{k}}) = \chi(X_{\bar{K}}).$$

Caractéristique d'Euler des familles de variétés

Lorsque $X \rightarrow S$ est une submersion (i.e. $X_{\bar{K}}$ et $X_{\bar{k}}$ sont lisses), alors

$$\chi(X_{\bar{k}}) = \chi(X_{\bar{K}}).$$

On supposera que $X_{\bar{K}}$ est lisse mais $X_{\bar{k}}$ possiblement singulière.

Formule de Milnor

Solution pour $A = \mathbb{C}[[t]]$ et lorsque $X_{\bar{k}}$ a une singularité isolée $x \in X_{\bar{k}}$.

Formule de Milnor

Solution pour $A = \mathbb{C}[[t]]$ et lorsque $X_{\bar{k}}$ a une singularité isolée $x \in X_{\bar{k}}$.

$$Jac(f) := \mathcal{O}_{X,x} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q} \right)$$

pour un système de coordonnées x_i en $x \in X$ et f est la fonction "t" sur X .

Formule de Milnor

Solution pour $A = \mathbb{C}[[t]]$ et lorsque $X_{\bar{k}}$ a une singularité isolée $x \in X_{\bar{k}}$.

$$Jac(f) := \mathcal{O}_{X,x} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q} \right)$$

pour un système de coordonnées x_i en $x \in X$ et f est la fonction "t" sur X .

Théorème (Milnor)

$$\chi(X_{\bar{k}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} Jac(f).$$

Formule de Milnor

Solution pour $A = \mathbb{C}[[t]]$ et lorsque $X_{\bar{k}}$ a une singularité isolée $x \in X_{\bar{k}}$.

$$Jac(f) := \mathcal{O}_{X,x} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q} \right)$$

pour un système de coordonnées x_i en $x \in X$ et f est la fonction "t" sur X .

Théorème (Milnor)

$$\chi(X_{\bar{k}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} Jac(f).$$

Plus généralement (Kapranov, Saito ...)

$$(\Omega_X^*, \wedge df) : \mathcal{O}_X \xrightarrow{df} \Omega_X^1 \xrightarrow{\wedge df} \Omega_X^2 \xrightarrow{\wedge df} \dots$$

$$\chi(X_{\bar{k}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = \sum_p (-1)^p H^p(X, (\Omega_X^*, \wedge df)).$$

Conjecture de Bloch

Sans hypothèse de caractéristique c'est plus compliqué dû aux aspects arithmétiques.

Conjecture de Bloch

Sans hypothèse de caractéristique c'est plus compliqué dû aux aspects arithmétiques.

Conjecture (Deligne 67, Bloch 85)

$$\chi(X_{\bar{k}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = [\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 + Sw(X_{\bar{K}}).$$

Conjecture de Bloch

Sans hypothèse de caractéristique c'est plus compliqué dû aux aspects arithmétiques.

Conjecture (Deligne 67, Bloch 85)

$$\chi(X_{\bar{k}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = [\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 + Sw(X_{\bar{K}}).$$



$$[\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 = \sum_p (-1)^p H^p(X, (\Omega_X^*, \wedge df))$$

Conjecture de Bloch

Sans hypothèse de caractéristique c'est plus compliqué dû aux aspects arithmétiques.

Conjecture (Deligne 67, Bloch 85)

$$\chi(X_{\bar{K}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = [\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 + Sw(X_{\bar{K}}).$$



$$[\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 = \sum_p (-1)^p H^p(X, (\Omega_X^*, \wedge df))$$

- $Sw(X_{\bar{K}})$ est le conducteur de Swan qui mesure la ramification sauvage de l'action de $Gal(\bar{K}/K)$ sur $H_{et}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Conjecture de Bloch

Sans hypothèse de caractéristique c'est plus compliqué dû aux aspects arithmétiques.

Conjecture (Deligne 67, Bloch 85)

$$\chi(X_{\bar{K}}) - \chi(X_{\bar{K}}) = [\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 + Sw(X_{\bar{K}}).$$



$$[\Delta_X \cdot \Delta_X]_0 = \sum_p (-1)^p H^p(X, (\Omega_X^*, \wedge df))$$

- $Sw(X_{\bar{K}})$ est le conducteur de Swan qui mesure la ramification sauvage de l'action de $Gal(\bar{K}/K)$ sur $H_{et}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Cas ouvert: caractéristique mixte (e.g. $A = \mathbb{Z}_p$). Égale caractéristique démontré récemment par T. Saito (2017).

Et les catégories ?

Les catégories jouent un rôle à deux niveaux.

Et les catégories ?

Les catégories jouent un rôle à deux niveaux.

- 1 Interprétation de la dimension en termes de catégories monoïdales.

Et les catégories ?

Les catégories jouent un rôle à deux niveaux.

- ① Interprétation de la dimension en termes de catégories monoïdales.
- ② Notion de variétés algébriques **non-commutatives**.

Et les catégories ?

Les catégories jouent un rôle à deux niveaux.

- 1 Interprétation de la dimension en termes de catégories monoïdales.
- 2 Notion de variétés algébriques **non-commutatives**.

Idée: Bloch est une version "non-commutative" de Gauss-Bonnet Riemman-Roch.

Dimension et catégories monoïdales

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale.

Dimension et catégories monoïdales

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Exemples typiques

- $\mathcal{C} = K - \text{Vect}$ les K -espaces vectoriels munie de $\otimes_K$.

Dimension et catégories monoïdales

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Exemples typiques

- $\mathcal{C} = K - \text{Vect}$ les K -espaces vectoriels munie de $\otimes_K$.
- $\mathcal{C} = K - \text{Vect}^{gr}$ les k -espaces vectoriels gradués munie de $\otimes_K$
(attention règle des signes ! $x \otimes y = (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$).

Dimension et catégories monoïdales

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Exemples typiques

- $\mathcal{C} = K - \text{Vect}$ les K -espaces vectoriels munie de $\otimes_K$.
- $\mathcal{C} = K - \text{Vect}^{gr}$ les k -espaces vectoriels gradués munie de $\otimes_K$ (attention règle des signes ! $x \otimes y = (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$).
- $\mathcal{C} = \text{Var}_K$ les variétés algébriques sur un corps K munie de $\otimes =$ produit direct.

Dimension et catégories monoïdales

Objet rigide $x \in \mathcal{C}$ s'il existe un dual $x^\vee \in \mathcal{C}$ caractérisé par un morphisme d'évaluation

$$x \otimes x^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$$

"non-dégénéré".

Dimension et catégories monoïdales

Objet rigide $x \in \mathcal{C}$ s'il existe un dual $x^\vee \in \mathcal{C}$ caractérisé par un morphisme d'évaluation

$$x \otimes x^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$$

"non-dégénéré".

Exemples

- $V \in K - Vect$ rigide si et seulement si de dimension finie (et $V^\vee$ et le dual usuel).

Dimension et catégories monoïdales

Objet rigide $x \in \mathcal{C}$ s'il existe un dual $x^\vee \in \mathcal{C}$ caractérisé par un morphisme d'évaluation

$$x \otimes x^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$$

"non-dégénéré".

Exemples

- $V \in K - \text{Vect}$ rigide si et seulement si de dimension finie (et $V^\vee$ et le dual usuel).
- $V \in K - \text{Vect}^{gr}$ rigide si et seulement si de dimension totale finie.

Dimension et catégories monoïdales

Objet rigide $x \in \mathcal{C}$ s'il existe un dual $x^\vee \in \mathcal{C}$ caractérisé par un morphisme d'évaluation

$$x \otimes x^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$$

"non-dégénéré".

Exemples

- $V \in K - Vect$ rigide si et seulement si de dimension finie (et $V^\vee$ et le dual usuel).
- $V \in K - Vect^{gr}$ rigide si et seulement si de dimension totale finie.
- $X \in Var_K$ rigide si et seulement si $X = *$!

Dimension des objets rigides

Si x est rigide sa dimension est définie comme le composé

$$\dim(x) : \mathbf{1} \xrightarrow{\text{coev}} x \otimes x^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{1}.$$

Dimension des objets rigides

Si x est rigide sa dimension est définie comme le composé

$$\dim(x) : \mathbf{1} \xrightarrow{\text{coev}} x \otimes x^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{1}.$$

$$\dim(x) \in \text{End}(\mathbf{1}).$$

Dimension des objets rigides

Si x est rigide sa dimension est définie comme le composé

$$\dim(x) : \mathbf{1} \xrightarrow{\text{coev}} x \otimes x^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{1}.$$

$$\dim(x) \in \text{End}(\mathbf{1}).$$

Exemples

- $V \in K - \text{Vect}$ rigide $\dim(V) = a(\dim_K(V)) \in K$ par le morphisme $a : \mathbb{Z} \rightarrow K$.

Dimension des objets rigides

Si x est rigide sa dimension est définie comme le composé

$$\dim(x) : \mathbf{1} \xrightarrow{\text{coev}} x \otimes x^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{1}.$$

$$\dim(x) \in \text{End}(\mathbf{1}).$$

Exemples

- $V \in K - \text{Vect}$ rigide $\dim(V) = a(\dim_K(V)) \in K$ par le morphisme $a : \mathbb{Z} \rightarrow K$.
- $V \in K - \text{Vect}^{gr}$ rigide $\dim(V) = \sum_i (-1)^i a(\dim_K V^i) \in K$.
Donc $\dim(H_{et}^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \chi(X)$.

Invariance de la dimension

Fait fondamental (facile à démontrer).

Théorème

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ foncteur monoïdal, alors pour tout objet rigide x de $\mathcal{C}$, $F(x)$ est rigide et

$$F(\dim(x)) = \dim(F(x)).$$

Invariance de la dimension

Fait fondamental (facile à démontrer).

Théorème

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ foncteur monoïdal, alors pour tout objet rigide x de $\mathcal{C}$, $F(x)$ est rigide et

$$F(\dim(x)) = \dim(F(x)).$$

On aimerait appliquer à $F = H_{et}^*$

$$H_{et}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : \text{Var}_k \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell - \text{Vect}^{gr}.$$

Invariance de la dimension

Fait fondamental (facile à démontrer).

Théorème

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ foncteur monoïdal, alors pour tout objet rigide x de $\mathcal{C}$, $F(x)$ est rigide et

$$F(\dim(x)) = \dim(F(x)).$$

On aimerait appliquer à $F = H_{et}^*$

$$H_{et}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : \text{Var}_k \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell - \text{Vect}^{gr}.$$

Mais $X \in \text{Var}_k$ n'est pas rigide !

Un théorème d'existence

Théorème (Blanc, Robalo, T., Vezzosi)

- 1 Il existe une catégorie Var_k^{nc} de *variétés non-commutatives* avec structure monoïdale $\otimes_k$ et un foncteur monoïdal

$$\mathcal{D} : \text{Var}_k \longrightarrow \text{Var}_k^{nc}.$$

Un théorème d'existence

Théorème (Blanc, Robalo, T., Vezzosi)

- 1 Il existe une catégorie Var_k^{nc} de *variétés non-commutatives* avec structure monoïdale $\otimes_k$ et un foncteur monoïdal

$$\mathcal{D} : Var_k \longrightarrow Var_k^{nc}.$$

- 2 Le foncteur monoïdal $X \mapsto H_{et}^*(X, \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise

$$Var_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Var_k^{nc} \xrightarrow{H_{et}^*} \mathbb{Q}_\ell - Vect^{gr}.$$

Un théorème d'existence

Théorème (Blanc, Robalo, T., Vezzosi)

- 1 Il existe une catégorie Var_k^{nc} de *variétés non-commutatives* avec structure monoïdale $\otimes_k$ et un foncteur monoïdal

$$\mathcal{D} : Var_k \longrightarrow Var_k^{nc}.$$

- 2 Le foncteur monoïdal $X \mapsto H_{et}^*(X, \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise

$$Var_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Var_k^{nc} \xrightarrow{H_{et}^*} \mathbb{Q}_\ell - Vect^{gr}.$$

- 3 $End_{Var_k^{nc}}(\mathbf{1}) = k - Vect_{dim < \infty}^{gr}$

Théorème (suite)

Théorème

4 *L'application induite*

$$H_{\text{et}}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : k - \text{Vect}_{\dim < \infty}^{\text{gr}} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

est la dimension au sens graduée.

Théorème (suite)

Théorème

4 *L'application induite*

$$H_{\text{et}}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : k - \text{Vect}_{\dim < \infty}^{\text{gr}} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

est la dimension au sens graduée.

5 *Si $X \in \text{Var}_k$ (propre et lisse) alors $\mathcal{D}(X)$ est rigide et*

$$\dim(\mathcal{D}(X)) = H^*(X, \Omega_X^*) \in k - \text{Vect}_{\dim < \infty}^{\text{gr}}.$$

Théorème (suite)

Théorème

4 *L'application induite*

$$H_{\text{et}}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : k - \text{Vect}_{\dim < \infty}^{\text{gr}} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

est la dimension au sens graduée.

5 *Si $X \in \text{Var}_k$ (propre et lisse) alors $\mathcal{D}(X)$ est rigide et*

$$\dim(\mathcal{D}(X)) = H^*(X, \Omega_X^*) \in k - \text{Vect}_{\dim < \infty}^{\text{gr}}.$$

Corollaire immédiat: $\chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_k H^p(X, \Omega_X^q)$

Application à la conjecture de Bloch

Théorème (T., Vezzosi)

- 1 *A tout $X \rightarrow S$ est associé une variété non-commutative $\mathcal{X}_\pi$.*

Application à la conjecture de Bloch

Théorème (T., Vezzosi)

① A tout $X \rightarrow S$ est associé une variété non-commutative $\mathcal{X}_\pi$.

②

$$\dim(\mathcal{X}_\pi) = H^*(X, (\Omega_X^*, \wedge df))$$

Application à la conjecture de Bloch

Théorème (T., Vezzosi)

① A tout $X \rightarrow S$ est associé une variété non-commutative $\mathcal{X}_\pi$.

②

$$\dim(\mathcal{X}_\pi) = H^*(X, (\Omega_X^*, \wedge df))$$

③ Sous certaines conditions on a

$$H_{\text{et}}^*(\mathcal{X}_\pi, \mathbb{Q}_\ell) = H_{\text{et}}^*(X_{\bar{k}}, X_{\bar{K}}; \mathbb{Q}_\ell) = \text{cohomologie relative.}$$

Application à la conjecture de Bloch

Corollaire

La conjecture de Bloch est vraie sous l'une des hypothèses suivantes:

Application à la conjecture de Bloch

Corollaire

La conjecture de Bloch est vraie sous l'une des hypothèses suivantes:

- ① *L'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente.*

Application à la conjecture de Bloch

Corollaire

La conjecture de Bloch est vraie sous l'une des hypothèses suivantes:

- ① *L'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente.*
- ② *L'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ n'a pas de point fixe.*

Application à la conjecture de Bloch

Corollaire

La conjecture de Bloch est vraie sous l'une des hypothèses suivantes:

- ① *L'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente.*
- ② *L'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ n'a pas de point fixe.*

Espoir que le cas général soit accessible par la même stratégie.

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Définition

Une variété non-commutative sur k est une (dg-)catégorie k -linéaire.

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Définition

Une variété non-commutative sur k est une (dg-)catégorie k -linéaire.

Dg-catégorie = catégorie pour laquelle les morphismes forment des complexes de k -espaces vectoriels.

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Définition

Une variété non-commutative sur k est une (dg-)catégorie k -linéaire.

Dg-catégorie = catégorie pour laquelle les morphismes forment des complexes de k -espaces vectoriels.

Deux exemples fondamentaux: $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{X}_\pi$.

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Définition

Une variété non-commutative sur k est une (dg-)catégorie k -linéaire.

Dg-catégorie = catégorie pour laquelle les morphismes forment des complexes de k -espaces vectoriels.

Deux exemples fondamentaux: $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{X}_\pi$.

Pour $X \in \text{Var}_k$ alors $\mathcal{D}(X)$ est la catégorie dérivée des complexes des faisceaux cohérents. Pour $X = \text{Spec } A$ affine c'est la catégorie des complexes bornés de A -modules projectifs de rang fini.

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Pour une famille $X \longrightarrow S$ alors $\mathcal{X}_\pi$ est la catégorie des factorisations matricielles pour la fonction "f":

Une variété non-commutative c'est quoi ?

Pour une famille $X \longrightarrow S$ alors $\mathcal{X}_\pi$ est la catégorie des factorisations matricielles pour la fonction "f": objets sont les diagrammes

$$E_0 \xrightarrow{u} E_1 \xrightarrow{v} E_0$$

de fibrés vectoriels avec $uv = vu = \times f$.

Y penser comme à une "déformation non-commutative" de $\mathcal{D}(X)$.

Deux commentaires

- ❶ Le morphisme évaluation $\mathcal{D}(X) \otimes_k \mathcal{D}(X)^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$ n'est pas commutatif (i.e. n'existe pas dans Var_k).

Deux commentaires

- ❶ Le morphisme évaluation $\mathcal{D}(X) \otimes_k \mathcal{D}(X)^\vee \longrightarrow \mathbf{1}$ n'est pas commutatif (i.e. n'existe pas dans Var_k).
- ❷ La variété non-commutative $\mathcal{X}_\pi$ n'est pas commutative (i.e. pas de la forme $\mathcal{D}(X)$).

Catégories et formule des traces en géométrie algébrique

Bertrand Toën
(CNRS, Toulouse)

Amiens, Janvier 2019