

Cours 3 : Formules des traces

Bertrand Toën

Mercredi 4 Mars 2020

On s'intéresse aujourd'hui au cas particulier de l'homologie des variétés différentiables (toutes seront supposées séparés, séparables et de classe C^∞).

1 Extension de la théorie de l'homologie

Nous avons vus l'existence des foncteurs d'homologie $X \mapsto H_i(X)$. Ceux-ci sont des foncteurs

$$H_i : Ho(CW^f) \longrightarrow Ab$$

définis sur la catégorie homotopique des CW finis. Soit Top^f la catégorie des espaces topologiques qui sont faiblement équivalents à des CW finis. Alors le foncteur d'inclusion

$$Ho(CW^f) \longrightarrow Ho(Top^f)$$

est une équivalence de catégories (théorème de Whitehead). On dispose ainsi, en choisissant un foncteur quasi-inverse de foncteurs d'homologie définis sur $Ho(Top^f)$

$$H_i : Ho(Top^f) \sim Ho(CW^f) \longrightarrow Ab.$$

Dans la pratique, cela signifie que pour un espace $X \in Top^f$, il faut au préalable choisir un CW fini X' et une équivalence faible $X' \rightarrow X$, puis définir $H_i(X)$ comme étant $H_i(X')$.

Plus généralement, les axiomes de Steenrod que nous avons donnés s'étendent à des axiomes sur tous les CW complexes, non nécessairement fini. Il suffit de garder les mêmes axiomes et de remplacer le dernier en autorisant aussi les réunions disjointes infinies. Le théorème d'existence et d'unicité reste vrai dans ce cas. Cela nous fournit de foncteurs d'homologie

$$H_i : Ho(Top) \longrightarrow Ab.$$

Cofibres homotopiques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'espaces topologiques. Nous utiliserons par la suite la *cofibre homotopique de f* , notée Y/X , définie comme objet de $Ho(Top)$ de la manière suivante. On remplace, à équivalence faible près, l'application f par une application f' qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

et telle que :

1. Y' est un CW complexe et f' est l'inclusion d'un sous-complexe,
2. les applications p et q sont des équivalences faibles.

La cofibre homotopique est alors définie comme le psuh-out dans Top

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & X/Y. \end{array}$$

C'est un objet bien défini dans la catégorie $Ho(Top)$.

Par exemple, la suspension d'un espace X est définie comme $*/X$, la cofibre homotopique de l'unique morphisme $X \rightarrow *$. Un modèle pour $*/X$ est ici le quotient du cylindre $[0, 1] \times X$ qui identifie $0 \times X$ et $1 \times X$ en deux points distincts.

Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ on dispose alors d'une suite exacte longue en homologie

$$H_i(X) \longrightarrow H_i(Y) \oplus H_i(*) \longrightarrow H_i(Y/X) \longrightarrow H_{i-1}(X) \longrightarrow H_{i-1}(Y) \oplus H_{i-1}(*).$$

Enfin, à partir de maintenant nous nous intéresserons à l'homologie à coefficients rationnels $H_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ que nous continuerons à noter $H_i(X)$.

2 Formule de Kunneth

Pour deux CW complexes X et Y , on peut construire des applications de Kunneth

$$H_i(X) \otimes H_j(Y) \longrightarrow H_{i+j}(X \times Y).$$

Si on interprète les groupes $H_i(X)$ comme $\pi_i(\mathbb{Z}[X])$ ces applications se construisent de la manière suivante. Un élément $\alpha \in H_i(X)$ est représenté par une application continue

$$\alpha : S^i \longrightarrow \mathbb{Z}[X]$$

qui envoie le point de base sur 0. De même, soit $\beta \in H_j(Y)$ représenté par

$$\beta : S^j \longrightarrow \mathbb{Z}[Y].$$

On peut former le produit direct

$$\alpha \times \beta : S^i \times S^j \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[Y].$$

On utilise alors le morphisme naturel $\mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[Y] \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[Y] \simeq \mathbb{Z}[X \times Y]$, qui envoie un couple $(\sum_i n_i x_i, \sum_j m_j y_j)$ sur $\sum_{i,j} n_i \cdot m_j (x_i, y_j)$. On obtient une application continue

$$\alpha \times \beta : S^i \times S^j \longrightarrow \mathbb{Z}[X \times Y]$$

Cette application envoie $S^i \times *$ et $* \times S^j$ tous deux sur 0, et donc se factorise par le smash produit

$$\alpha \cdot \beta : S^{i+j} \simeq (S^i \times S^j) / (S^i \times * \cup * \times S^j) \longrightarrow \mathbb{Z}[X \times Y].$$

C'est l'élément cherché dans $H_{i+j}(X \times Y)$.

Proposition 2.1 *Les applications définies ci-dessus induisent des isomorphismes*

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \simeq H_n(X \times Y).$$

La preuve de cette proposition se fait en découpant X et Y en cellules, et en utilisant la suite exacte longue en homologie. Noter que comme nous sommes à coefficients rationnels l'opération $- \otimes H_j(Y)$ est un foncteur exact et donc préserve les suites exactes. Cela permet de se ramener au cas où X et Y sont des réunions disjointes de sphères, et ultimement au cas où ils sont des réunions disjointes de singletons. Pour ce dernier cas la formule se réduit à la formule usuelle sur le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par un produit d'ensembles E et F

$$\mathbb{Q}[E] \otimes \mathbb{Q}[F] \simeq \mathbb{Q}[E \times F]$$

3 Classe fondamentale

Une orientation sur une variété X est la donnée d'une trivialisation du déterminant de son fibré tangent

$$or : \wedge^{\dim X} TX \simeq X \times \mathbb{R}.$$

Une variété orientée est par définition une variété X munie d'une trivialisation or comme ci-dessus.

Soit X une variété compacte, connexe et orientée. On choisit un plongement $j : X \hookrightarrow S^n$ pour un entier n assez grand. On considère l'inclusion $S^n - X = U \hookrightarrow S^n$, ce qui fournit une suite exacte en homologie

$$H_i(U) \longrightarrow H_i(S^n) \oplus H_i(*) \longrightarrow H_i(S^n/U) \longrightarrow H_{i-1}(U) \longrightarrow H_{i-1}(S^n) \oplus H_{i-1}(*).$$

L'espace S^n/U s'appelle *l'espace de Thom du plongement j* . Il se décrit à l'aide du théorème d'existence de voisinage tubulaire, qui permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soit $j : X \hookrightarrow Y$ un plongement de variétés compactes. Soit $\mathcal{N} \longrightarrow X$ le fibré normal de X and Y , et $X \hookrightarrow \mathcal{N}$ le plongement le long de la section nulle. Alors on a un isomorphisme canonique dans $Ho(Top)$*

$$Y/Y - X \simeq \mathcal{N}/\mathcal{N} - X.$$

Une preuve conceptuelle de cette proposition, valide aussi dans le cadre plus général des schémas est donnée dans [Mo-Vo, Thm. 2.23].

Revenons à notre cas d'un plongement $X \hookrightarrow S^n$. En utilisant l'orientation on peut montrer qu'il existe un isomorphisme naturel, appelé *isomorphisme de Thom*

$$H_i(X) \simeq H_{i+k}(\mathcal{N}/\mathcal{N} - X)$$

pour tout $i \geq 0$ et où $k = n - \dim X$ est la codimension de X dans S^n . Lorsque le fibré normal est trivial l'espace $\mathcal{N}/\mathcal{N} - X$ n'est autre que $X/(X \times S^{k-1})$ et l'isomorphisme précédent se déduit de la suite exacte longue en homologie et de la formule de Kunneth pour $X \times S^{k-1}$. Le cas général est

une version tordue de ce cas particulier, tordue par le fibré $\mathcal{N}$. Ce fibré est muni d'une orientation canonique induite par les orientations de X et de S^n , et cette orientation est utilisée pour démontrer que l'isomorphisme dans le cas du fibré trivial se généralise.

On trouve ainsi des applications

$$H_i(S^n) \longrightarrow H_i(S^n/S^n - X) \simeq H_{i-k}(X).$$

Pour $i = n$ cela fournit

$$\mathbb{Z} \simeq H_n(S^n) \longrightarrow H_d(X)$$

avec $d = \dim X$.

Définition 3.2 *L'image de 1 par l'application précédente s'appelle la classe fondamentale de X . Elle est notée $[X] \in H_d(X)$.*

4 Dualité de Poincaré et morphismes de Gysin

Nous pouvons combiner l'existence de la classe fondamentale $[X]$ est la formule de Kunneth afin d'établir la dualité de Poincaré. Pour cela, soit X une variété compacte (connexe) et orientée de dimension d . Considérons la diagonale

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

et le morphisme induit en homologie

$$\Delta_* : H_d(X) \longrightarrow H_d(X \times X).$$

Par Kunneth le membre de droite est $\oplus_{i+j=d} H_i(X) \otimes H_j(X)$, et ainsi l'image de $[X]$ par Δ_* fournit un élément

$$\Delta_*([X]) \in \oplus_{i+j=d} H_i(X) \otimes H_j(X).$$

Comme les $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels $H_i(X)$ sont tous de dimension finie, cet élément peut aussi être vu comme une famille d'applications linéaires

$$\mathbb{D}_i : H_i(X)^\vee \longrightarrow H_{d-i}(X).$$

La dualité de Poincaré est alors le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Les morphismes $\mathbb{D}_i$ sont des isomorphismes $\forall i$.*

De manière plus classique, la dualité de Poincaré s'exprime de la manière suivante en cohomologie. On pose

$$H^i(X) := H_i(X)^\vee.$$

Pour une application $f : X \longrightarrow Y$ l'application duale de $f_* : H_i(X) \longrightarrow H_i(Y)$ sera notée

$$f^* := f_*^\vee : H^i(Y) \longrightarrow H^i(X).$$

On trouve un $\mathbb{Q}$ -espace gradué $H^*(X)$. Il est muni d'une structure d'algèbre commutative graduée (la commutativité est au sens graduée ici) obtenue par Kunneth et le morphisme induit par la diagonale

$$\Delta^* := H^*(X) \otimes H^*(X) \simeq H^*(X \times X) \longrightarrow H^*(X).$$

La classe fondamentale $[X]$ est maintenant une application linéaire graduée

$$H^*(X) \longrightarrow \mathbb{Q}[-d]$$

où $\mathbb{Q}[-d]$ signifie l'espace $\mathbb{Q}$ placé en degré d . Cette application est *l'application d'intégration*, par rapport à la classe $[X]$, et sera notée

$$\int_X : H^*(X) \longrightarrow \mathbb{Q}[-d].$$

Le théorème 4.1 affirme alors que la forme bilinéaire sur $H^*(X)$ définie par

$$\langle a, b \rangle := \int_X a.b$$

est non-dégénérée.

Exemple - 1 : sphères. Pour $X = S^n$ l'algèbre $H^*(S^n)$ s'écrit $\mathbb{Q}[t]/t^2$ où t est un générateur de degré n . La dualité dicte ici que 1 est dual de t .

Exemple - 2 : espaces projectifs complexes. Pour $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'algèbre graduée $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ s'écrit comme $\mathbb{Q}[u]/u^{n+1}$ avec u un générateur en degré 2. La dualité affirme ici que u^i est dual de u^{n-i} . L'accouplement $\langle -, - \rangle$ est ici donné par les coefficients de u^n dans le produit de polynômes.

Pour terminer ce paragraphe signalons que la dualité de Poincaré peut être utilisée pour introduire une *bivariance* sur l'homologie (ou dualement la cohomologie). Il s'agit d'introduire, à l'aide de la dualité, des images réciproques en homologie, *appelées morphismes de Gysin* ou encore *images inverses exceptionnelles*.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre variétés compactes orientées et connexes. On définit les images réciproques exceptionnelles en homologie

$$f^! : H_i(Y) \longrightarrow H_{i+d}(X)$$

où $d = \dim X - \dim Y$. L'application $f^!$ est obtenue par composition

$$H_i(Y) \xrightarrow{\mathbb{D}^{-1}} H^{\dim Y - i}(Y) \xrightarrow{f^*} H^{\dim Y - i}(X) \xrightarrow{\mathbb{D}} H_{d+i}(X).$$

Par construction $X \mapsto H_*(X)$ devient ainsi un foncteur contravariant de la catégorie des variétés compactes et orientées. On a de plus la formule d'intersection suivante, aussi appelée formule *push-pull*, due à Quillen (voir [Qu, Prop. 3.3], ou encore [Hu]).

Proposition 4.2 *Soit $f : X \longrightarrow M$ et $g : Y \longrightarrow M$ des applications C^∞ entre variétés compactes, orientées et connexes. On suppose que f et g sont transverses, de sorte à ce que $X \times_M Y$ soit une variété compacte orientée. Alors, si l'on note $p : X \times_M Y \longrightarrow X$ et $q : X \times_M Y \longrightarrow Y$ les projections canoniques, alors on a*

$$f^! g_* = p_* q^! : H_i(Y) \longrightarrow H_{i+d}(X)$$

où $d = \dim X - \dim M$.

5 Formule des traces de Lefschetz

Nous terminons avec la formule des traces de Lefschetz, que nous démontrerons au cours suivant. Pour cela nous rappelons la notion de points fixes non-dégénérés et de leurs indices. Soit donc X une variété orientée et $f : X \longrightarrow X$ un endomorphisme. Nous dirons que f possède des points fixes non-dégénérés si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Les points fixes de f sont isolés.
2. Pour tout point fixe $x = f(x)$, l'application linéaire

$$Id - Tf_x : T_x X \longrightarrow T_x X$$

est bijective.

Sous ces conditions, l'indice d'un point fixe x par f est défini comme étant le signe du déterminant de $Id - Tf_x$

$$i(f, x) := \text{sign}(\det(Id - Tf_x)) \in \{-1, 1\}.$$

Theorème 5.1 *Soit $f : X \longrightarrow X$ en endomorphisme d'une variété compacte orientée. On suppose que les points fixes de f sont isolés et non dégénérés. Alors on a*

$$\sum_{x=f(x)} i(f, x) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(f^* : H^i(X) \rightarrow H^i(X)).$$

Références

- [Mo-Vo] Morel, Fabien ; Voevodsky, Vladimir *A1-homotopy theory of schemes*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 90 (1999), 45-143 (2001).
- [Hu] M. Hutching *Cup product and intersections*. <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/cup.pdf>
- [Qu] Quillen, Daniel *Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations*. Advances in Math. 7 (1971), 29-56 (1971).