

Cours 4 : Fonctions Zêta

Bertrand Toën

Lundi 9 Mars 2020

1 Catégories monoïdales symétriques

Une catégorie monoïdale est essentiellement un monoïde associatif et unitaire dans le catégorie des catégories. À un détail près toutefois, les égalités assurant l'associativité et l'unité sont remplacées par des isomorphismes qui doivent satisfaire certaines conditions de compatibilité appelées *cohérences*.

De manière plus formelle, une *catégorie monoïdale* consiste en les données suivantes :

1. une catégorie C
2. un foncteur

$$- \otimes - : C \times C \longrightarrow C$$

3. un objet $1 \in C$ et de pour tout objet $x \in C$ d'isomorphismes fonctoriels en x

$$1 \otimes x \xrightarrow{\sim} x \xleftarrow{\sim} x \otimes 1$$

4. pour tout triplet d'objets $(x, y, z) \in C^3$ d'isomorphismes fonctoriels en x, y et z

$$a_{xyz} : x \otimes (y \otimes z) \simeq (x \otimes y) \otimes z.$$

On demande de plus que les isomorphismes a_{xyz} satisfassent à une compatibilité appelée *axiome du pentagone* : pour tout objets x, y, z et t le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & x \otimes ((y \otimes z) \otimes t) & \\ \text{\scriptsize $id_x \otimes a_{yzt}$} \nearrow & & \searrow \text{\scriptsize $a_{xy \otimes tz}$} \\ x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) & & (x \otimes (y \otimes z)) \otimes t \\ & \searrow \text{\scriptsize $a_{xyz \otimes t}$} & \downarrow \text{\scriptsize $a_{xyz} \otimes id_t$} \\ & (x \otimes y) \otimes (z \otimes t) & \xrightarrow{\text{\scriptsize $a_{x \otimes yz}$}} ((x \otimes y) \otimes z) \otimes t \end{array}$$

On demande aussi une compatibilité entre les isomorphismes a_{xyz} et les isomorphismes d'unité $1 \otimes x \simeq x \simeq x \otimes 1$. Par exemple, lorsque $y = 1$ le diagramme suivant doit commuter

$$\begin{array}{ccc} x \otimes (1 \otimes y) & \xrightarrow{\sim} & x \otimes y \\ \text{\scriptsize a_{x1y}} \downarrow & \nearrow \sim & \\ (x \otimes 1) \otimes y & & \end{array}$$

On renvoie à [Sa] pour plus de détails sur ces notions.

Nous nous intéresserons au cas *symétrique*. Rappelons qu'une *structure symétrique* sur une catégorie monoïdale C consiste en la donnée d'isomorphismes fonctoriels

$$\sigma_{xy} : x \otimes y \simeq y \otimes x$$

vérifiant $\sigma_{xy}^2 = id$ et compatible avec les isomorphismes d'unité et d'associativité de C (axiome de l'hexagone, voir [Sa]).

Quelques exemples de catégories monoïdales.

Catégories des ensembles. La catégorie $C = Ens$ des ensembles est munie d'une structure monoïdale symétrique donnée par le produit direct. Il en est de même pour toute catégorie qui possède des produits finis.

Endofoncteurs. Pour toute catégorie C la catégorie $Fun(C, C)$ des foncteurs de C dans elle-même est munie d'une structure monoïdale donnée par la composition des foncteurs. Cette catégorie monoïdale est stricte, au sens où les isomorphismes a_{xyz} sont tous des identités.

Espaces vectoriels. Soit K un corps et $C = Vect(K)$ la catégorie des K -espaces vectoriels. Elle possède une structure monoïdale symétrique donnée par le produit tensoriel sur K . Les isomorphismes de symétrie $\sigma : V \otimes W \simeq W \otimes V$ sont induit par la règle usuelle $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

Espaces vectoriels gradués. Soit K un corps et $Vect^{gr}(K)$ la catégorie des K -espaces vectoriels gradués. Cette catégorie est munie d'une structure monoïdale symétrique donnée par le produit tensoriel gradué. Pour deux espaces gradués $V = \oplus V_i$ et $W = \oplus W_j$ on pose

$$(V \otimes W)_n := \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j.$$

C'est de plus une catégorie monoïdale symétrique, et au moins de deux manières possibles. Nous utiliserons la règle de symétrie graduée, dont les isomorphismes de symétrie

$$(V \otimes W)_n \simeq (W \otimes V)_n$$

sont induit par

$$x \otimes y \mapsto (-1)^{ij} y \otimes x$$

pour $x \in V_i$ et $y \in W_j$.

Un *foncteur monoïdal* entre deux catégories monoïdales C et C' est un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ muni d'isomorphismes

$$b_{xy} : F(x) \otimes F(y) \simeq F(x \otimes y) \quad F(1) \simeq 1$$

fonctoriels en x et y , et compatible avec les contraintes d'associativité et d'unité de C et de C' . Si de plus C et C' sont munies de structures symétriques, on dit que F est de plus *symétrique* si les isomorphismes b_{xy} sont de plus compatibles avec les isomorphismes de symétrie de C et de C' .

Dans la suite, nous allons nous intéresser à un foncteur monoïdal symétrique que nous avons déjà vu, à savoir l'homologie. Pour cela, on considère le foncteur d'homologie totale

$$H_* : Top \longrightarrow Vect^{gr}(\mathbb{Q})$$

de la catégorie des espaces topologiques vers celle des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels gradués. Le théorème de Kunneth (voir Cours 3) nous donne une structure monoïdale symétrique sur le foncteur H_* .

2 Rigidité et formule des traces

Un objet x dans une catégorie monoïdale symétrique C est dit *rigide*, ou encore *dualisable* s'il existe un objet $x^\vee \in C$ et un morphisme

$$ev : x \otimes x^\vee \longrightarrow 1$$

satisfaisant la propriété suivante : pour toute paire d'objets $(y, z) \in C^2$ l'application

$$C(y, x^\vee \otimes z) \xrightarrow{x \otimes -} C(x \otimes y, x \otimes x^\vee \otimes z) \xrightarrow{ev \circ -} C(x \otimes y, 1 \otimes z) \simeq C(x \otimes y, z)$$

est bijective.

Dans l'exemple $C = Vect(K)$, les objets rigides sont exactement les K -espaces vectoriels de dimension finie. Pour $Vect^{gr}(K)$ il s'agit des espaces gradués de dimension totale finie.

Une propriété importante est, étant donné x , l'unicité de la paire $(x^\vee, ev)$. On voit facile que si $((x^\vee)', ev')$ est une autre paire vérifiant les conditions ci-dessus alors il existe un unique isomorphisme $x^\vee \simeq (x^\vee)'$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x \otimes x^\vee & \xrightarrow{ev} & 1 \\ \simeq \downarrow & \nearrow ev' & \\ x \otimes (x^\vee)' & & \end{array}$$

Ainsi, la paire $(x^\vee, ev)$ est unique à isomorphisme unique près, et est appelé un *dual de x* . Lorsque $C = Vect(K)$ le dual d'un espace vectoriel de dimension finie V au sens ci-dessus est l'espace vectoriel dual au sens usuel, muni du morphisme habituel d'évaluation $V^\vee \otimes V \longrightarrow K$.

Une propriété élémentaire, mais cruciale, est la préservation des objets duaux par les foncteurs monoïdaux.

Proposition 2.1 *Soit $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur monoïdal symétrique. Si x est rigide dans C alors $F(x)$ est rigide dans C' . De plus, si $(x^\vee, ev)$ est un dual de x alors $(F(x^\vee), F(ev))$ est un dual de $F(x)$ dans C' .*

Pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans C , avec x rigide, on peut construire le graphe de f

$$\Gamma(f) : 1 \longrightarrow x^\vee \otimes y.$$

Il s'agit de l'élément correspondant à f par la bijection $C(x, y) \simeq C(1, x^\vee \otimes y)$. En particulier, pour un endomorphisme f de x on obtient ainsi un morphisme composé

$$Tr(f) : 1 \xrightarrow{\Gamma(f)} x^\vee \otimes x \xrightarrow{ev} 1$$

appelé la *trace* de f . Par construction on a

$$Tr(f) \in C(1, 1).$$

Lorsque $C = Vect(K)$ et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie alors $Tr(f) \in End(K) \simeq K$ s'identifie à un scalaire, qui n'est autre que le trace habituelle.

Le corollaire immédiat de la proposition 2.1 est la préservation des traces par tout foncteur monoïdal symétrique.

Corollaire 2.2 *Soit $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur monoïdal symétrique, $x \in C$ un objet rigide et $f : x \rightarrow x$ un endomorphisme. Alors on a*

$$F(Tr(f)) = Tr(F(f)) \in C'(1, 1).$$

Nous pouvons maintenant appliquer le corollaire précédent pour démontrer la formule des traces de Lefschetz. Pour cela, nous commençons par construire une catégorie monoïdale symétrique $Corr$ des correspondances homologiques entre variétés compactes, connexes et orientées.

Les objets de $Corr$ sont les couples (M, m) , où M est une variété compacte, connexe et orientée, et $m \in \mathbb{Z}$. Les morphismes de (M, m) dans (N, n) sont définis par

$$Corr((M, m), (N, n)) := H_{dim M + m - n}(M \times N).$$

Il nous faut décrire l'unité et la composition des morphismes. L'identité de (M, m) est par définition

$$Id_{(M, m)} := \Delta_*([M]) \in H_{dim M}(M \times M)$$

où $[M] \in H_{dim M}(M)$ est la classe fondamentale de M (pour l'orientation choisie) et $\Delta : M \longrightarrow M \times M$ l'immersion diagonale.

La composition des morphismes est quand à elle définie de la manière suivante. Pour trois variétés M , N et P , on note

$$p_{MP} : M \times N \times P \longrightarrow M \times P \quad p_{MN} : M \times N \times P \longrightarrow M \times N \quad p_{NP} : M \times N \times P \longrightarrow N \times P$$

les projections naturelles. Alors, pour trois objets (M, m) , (N, n) et (P, p) on dispose de l'application

$$(p_{MP})_*(p_{MN}^!(-) \cdot p_{NP}^!(-)) : H_{dim M + m - n}(M \times N) \otimes H_{dim N + n - p}(N \times P) \longrightarrow H_{dim M + m - p}(M \times P).$$

Ici, nous avons noté le produit d'intersection en homologie sur une variété X par

$$(- \cdot -) := \Delta_X^! : H_*(X) \otimes H_*(X) \simeq H_*(X \times X) \longrightarrow H_{*-dim X}(X).$$

Cela définit la catégorie $Corr$. Nous la munissons de la structure monoïdale symétrique

$$(M, m) \otimes (N, n) := (M \times N, n + m).$$

On remarque alors que $Corr$ est une catégorie monoïdale symétrique dans laquelle tous les objets sont rigides. Le dual de (M, m) est par ailleurs $(M, -m)$, et le morphisme d'évaluation

$$(M, m) \otimes (M, -m) \simeq (M \times M, 0) \longrightarrow 1 = (*, 0)$$

est donné par la classe

$$\Delta_*([M]) \in H_{dim M}(M \times M).$$

Enfin, on dispose d'un foncteur monoïdal symétrique

$$H_* : Corr \longrightarrow Vect^{gr}(\mathbb{Q})$$

de la catégorie $Corr$ vers les espaces gradués. Ce foncteur envoie un objet (M, m) sur l'espace gradué $H_{*-m}(M)$. Il est isomorphe au foncteur

$$\bigoplus_i Hom((*, i), -) : Corr \longrightarrow Vect^{gr}(\mathbb{Q}).$$

Pour le corollaire suivant, on rappelle que l'on a noté

$$\langle -, - \rangle : H_*(X) \otimes H_*(X) \longrightarrow \mathbb{Q}[dim X]$$

l'accouplement non-dégénéré donné par la dualité de Poincaré.

Corollaire 2.3 *Pour tout endomorphisme $f : M \longrightarrow M$ d'une variété compacte, connexe et orientée. Soit $\Gamma(f) : M \hookrightarrow M \times M$ le graphe de f . Alors, on a*

$$\langle \Delta_*([M]), \Gamma(f)_*([M]) \rangle = \sum_i (-1)^i Tr(f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(X)).$$

Lorsque f possède des points fixes isolés et non-dégénérés, alors le corollaire précédent donne la formule des traces de Lefschetz que nous avons vu au cours 3, par application de la formule d'intersection (voir cours 3 proposition 4.2) au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\Delta \times \Gamma(f)} & M \times M \times M \times M \\ \uparrow & & \uparrow \Delta_{M \times M} \\ Z & \longrightarrow & M \times M \end{array}$$

où Z est la sous-variété des points fixes de f (qui consiste en un nombre fini de points).

3 Fonctions Zêta

Reprenons une variété compacte, connexe et orientée M , munie d'un endomorphisme f . On supposera la condition suivante satisfaite : pour tout $m > 0$, les points fixes de f^m sont isolés, non-dégénérés et d'indices positifs. Dans ce cas, la formule des traces nous donne une égalité de nombre entiers positifs

$$N(f, m) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(f_*^m : H_*(M) \rightarrow H_*(M)),$$

où $N(f, m)$ est le nombre de points fixes du m -ème itéré de f .

Définition 3.1 Avec les conditions ci-dessus, la fonction Zêta du couple (M, f) est la série formelle

$$Z(M, f, T) := \exp\left(-\sum_n \frac{N(f, m)}{n} T^m\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

Une conséquence de la formule des traces de Lefschetz affirme que $Z(M, f, T)$ est une fraction rationnelle donnée par le polynôme caractéristique de f_* sur $H_*(X)$.

Corollaire 3.2 La série formelle $Z(M, f, T)$ est rationnelle. On a

$$Z(M, f, T) = \prod_i \det(\text{Id} - f_i T)^{(-1)^i},$$

où $f_i = f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(X)$ est l'endomorphisme induit sur le i -ème espace d'homologie.

Ce corollaire se déduit simplement du fait suivant. Pour $f : V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\log(\det(\text{Id} - fT)) = -\sum_n \frac{\text{Tr}(f^m)}{m} T^m.$$

Cela se voit, par exemple, en plongeant $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et en mettant f sous forme triangulaire supérieure dans une base de V .

On voit en particulier la formule évidente suivante, qui permet de retrouver la caractéristique d'Euler de M comme le degré de la fonction Zêta.

Corollaire 3.3 On a

$$\chi(M) = \deg(Z(M, f, T)).$$

4 Les conjectures de Weil

Revenons maintenant à un système d'équations polynômiales

$$X : \begin{cases} F_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ F_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ F_p(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

On suppose ici que les équations sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On dispose ainsi, pour tout nombre premier p d'un ensemble de solutions complètes

$$\bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_p) \subset \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_p)$$

dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. Le Frobenius de $\bar{\mathbb{F}}_p$ induit un endomorphisme

$$Fr : \bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_p).$$

Les points fixes du m -ème itéré Fr^m forment l'ensemble $\bar{X}(\mathbb{F}_q)$, l'ensemble des solutions complètes à coefficients dans $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ avec $q = p^m$.

On note $N(\bar{X}, m)$ le cardinal de l'ensemble fini $\bar{X}(\mathbb{F}_q)$

$$N(\bar{X}, m) := |\bar{X}(\mathbb{F}_q)|.$$

Par analogie avec le cas différentiable on pose.

Définition 4.1 *La fonction Zêta du système X , en un nombre premier p , est la série formelle*

$$Z(\bar{X}, T) := \exp\left(-\sum_m \frac{N(\bar{X}, m)}{m} T^m\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

Les conjectures de Weil prédisent un certains nombres de propriétés de la fonction $Z(\bar{X}, T)$. En ce qui nous concerne nous en retiendrons une partie, celle qui nous intéresse pour la question du calcul des nombres de Betti de $\bar{X}(\mathbb{C})$. On renvoie à [Kl] pour les conjectures complètes.

Conjecture 4.2 *Avec les notations ci-dessus, et en supposant de plus que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

1. *Le sous-espace $\bar{X}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une sous-variété.*
2. *Le nombre premier p est assez grand.*

Alors on a :

1. *La fonction $Z(\bar{X}, T)$ est rationnelle.*
2. *Les zéros et le pôles de $Z(\bar{X}, T)$ sont des nombres algébriques de Weil, c'est à dire des $a \in \bar{\mathbb{Q}}$ tels que pour tout plongement $j : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ on ait*

$$|j(a)| = p^{-i/2}$$

pour un entier $i \in \mathbb{N}$.

3. *Le degré du facteur de $Z(\bar{X}, T)$ correspondant aux zéros ou pôles de poids $i/2$ est égal au i -ème nombre de Betti de $\bar{X}(\mathbb{C})$.*

Nous avons vu comment (1) ci-dessus pouvait se déduire d'une formule des traces à la Lefschetz. Par ailleurs, nous avons vu que la formule des traces à la Lefschetz était une conséquence formelle de l'existence du foncteur d'homologie et des ses propriétés (Kunneth et dualité de Poincaré). Pour démontrer les conjectures de Weil il nous faut donc montrer l'existence d'un foncteur d'homologie pour des systèmes d'équations polynômiales. C'est ce que nous ferons au cours suivant à l'aide de la topologie et cohomologie étale.

Références

- [Kl] Steve Kleiman *Algebraic cycles and the Weil conjectures*. Dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 359-386, Adv. Stud. Pure Math., 3, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [Sa] Saavedra Rivano, Neantro *Catégories Tannakiennes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972