

Cours 6 : cohomologie des topos

Bertrand Toën

Mercredi 11 Mars 2020

1 Cohomologie des topos

Pour un topos T on note $Ab(T)$ la catégorie des *groupes abéliens dans T* . Il s'agit de la catégorie dont les objets sont les $A \in T$ munis de deux morphismes

$$\mu : A \times A \longrightarrow A \quad e : * \longrightarrow A$$

qui font de A un groupe abélien interne à T . Une autre manière de dire cela : pour tout autre objet $X \in T$ la loi induite par μ

$$T(X, A) \times T(X, A) \longrightarrow T(X, A \times A)$$

est une loi de groupes abéliens d'unité $X \longrightarrow \bullet \xrightarrow{e} A$ induite par e .

La catégorie $Ab(T)$ est une catégorie abélienne et donc possède une notion de suites exactes. Une telle suite est la donnée d'une suite de morphismes dans $Ab(T)$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

telle que

1. pour tout $X \in T$ la suite induite

$$0 \longrightarrow T(X, A) \longrightarrow T(X, B) \longrightarrow T(X, C)$$

est exacte.

2. Le morphisme naturel dans T

$$co\lim (B \times A \rightrightarrows B) \longrightarrow C$$

est un isomorphisme.

La double flèche $B \times A \rightrightarrows B$ est ici la projection sur le premier facteur et la somme de cette projection et du morphisme $A \rightarrow B$.

Attention, dans la suite exacte (1) : l'application $T(X, B) \rightarrow T(X, C)$ n'est pas surjective en général. C'est précisément l'intérêt des foncteurs de cohomologie de la prolonger en une suite exacte longue.

Exemple. Supposons que $T = Sh(X)$ soit le topos des faisceaux sur un espace topologique X . Dans ce cas, $Ab(T)$ est la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur X . C'est à dire des foncteurs

$$A : Ouv(X)^o \longrightarrow Ab$$

qui, composés avec le foncteur d'oubli $Ab \longrightarrow Ens$, vérifient la condition de faisceaux.

Une suite exacte de faisceaux abéliens sur X est consistée alors en une suite de morphismes

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

telle que

1. pour tout ouvert $U \subset X$ la suite induite

$$0 \longrightarrow A(U) \longrightarrow B(U) \longrightarrow C(U)$$

est exacte.

2. Pour tout ouvert $U \subset X$ et tout élément $x \in C(U)$, il existe un recouvrement ouvert U_i de U , tel que les éléments $x_{U_i} \in C(U_i)$ soient dans l'image de $B(U_i) \rightarrow C(U_i)$.

L'exemple emblématique de suite exacte de faisceaux est la suite exacte de l'exponentielle. Dans cet exemple $X = \mathbb{C}^*$ et la suite exacte est

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}$ est le faisceau des fonctions holomorphes (pour la loi additive) et $\mathcal{O}^*$ le faisceau des fonctions holomorphes partout non-nulles (pour la loi multiplicative).

Soit maintenant $f_* : T \longrightarrow T'$ un morphisme de topos. Nous allons définir des foncteurs

$$\mathbb{R}^i f_* : Ab(T) \longrightarrow Ab(T')$$

par une propriété universelle. Pour cela, on rappelle qu'un δ -foncteur (T^*, δ) , de $Ab(T)$ vers $Ab(T')$ consiste en les données suivantes.

1. Des foncteurs additifs (i.e. qui commutent aux sommes finies)

$$T^i : Ab(T) \longrightarrow Ab(T').$$

Ici $i \in \mathbb{Z}$ et on pose $T^i = 0$ pour $i < 0$.

2. Pour toute suite exacte $(S) : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans $Ab(T)$, une famille de morphismes

$$\delta_S : T^i(C) \longrightarrow T^{i+1}(A),$$

fonctoriels en la suite exacte (S)

On demande de plus que pour toute suite exacte (S) comme ci-dessus, la suite

$$T^i(A) \longrightarrow T^i(B) \longrightarrow T^i(C) \xrightarrow{\delta_S} T^{i+1}(A) \longrightarrow T^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

soit exacte pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On définit alors le δ -foncteur $(\mathbb{R}^i f_*, \delta)$ de $Ab(T)$ dans $Ab(T')$ comme étant le δ -foncteur universel muni d'une transformation naturelle $f_* \Rightarrow \mathbb{R}^0 f_*$. En d'autres termes, pour tout δ -foncteur (T^*, δ) et toute transformation naturelle $f_* \Rightarrow T^0$ il existe une unique transformation naturelle de δ -foncteurs

$$(\mathbb{R}^i f_*, \delta) \Rightarrow (T^*, \delta)$$

compatibles avec les transformations naturelles $f_* \Rightarrow \mathbb{R}^0 f_*$ et $f_* \Rightarrow T^0$.

L'existence de $(\mathbb{R}^i f_*, \delta)$ est assurée par la proposition suivante, qui est une conséquence formelle de l'existence de suffisamment d'injectifs dans la catégorie $Ab(T)$.

Proposition 1.1 *Pour tout morphisme de topos $f_* : T \longrightarrow T'$ le δ -foncteur universel $(\mathbb{R}^* f_*, \delta)$ existe (et donc est unique à isomorphisme unique près).*

On dispose ainsi de foncteurs

$$\mathbb{R}^i f_* : Ab(T) \longrightarrow Ab(T'),$$

appelés *foncteurs de cohomologie relative* de T au-dessus de T' . Lorsque $T = Sh(X)$ et $T' = Sh(X')$, pour deux CW complexes X et X' , et que le morphisme $f_* : Sh(X) \longrightarrow Sh(X')$ est induit par une application continue $f : X \rightarrow X'$, on peut relier ces foncteurs à la cohomologie des espaces que nous avons vu dans les premiers cours.

Prenons $\mathbb{Q} \in Ab(X)$ le faisceau constant associé à $\mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{R}^i f_*(\mathbb{Q})$ est le faisceau sur X' associé au foncteur

$$(U \in Ouv(X')) \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathbb{Q}).$$

Lorsque $f_* : T \longrightarrow \widehat{*}$ est la projection sur le topos ponctuel, alors pour tout $A \in Ab(T)$ l'objet $\mathbb{R}^i f_*(A) \in Ab(\widehat{*}) = Ab$ est un groupe abélien. Il est noté généralement $H^i(T, A)$ et est appelé le *i -ème groupe de cohomologie de T à coefficients dans A* .

Pour finir, supposons que T soit un topos et $X \in T$ un objet. On dispose du topos T/X des objets au-dessus de X . Il s'agit de la catégorie dont les objets sont des paires (Y, u) , avec $Y \in T$ et $u : Y \rightarrow X$. Un morphisme dans T/X de (Y, u) vers (Y', u') est simplement la donnée d'un morphisme $f : Y \rightarrow Y'$ avec $u' \circ f = u$.

On dispose d'un morphisme de topos

$$p_* : T/X \longrightarrow T.$$

L'adjoint à gauche de ce foncteur est $T \longrightarrow T/X$ qui envoie Y sur $Y \times X$ muni de la projection sur X . L'adjoint à droite s'appelle la *restriction de Weil*, et envoie $u : Y \rightarrow X$ sur l'objet de T qui représente les sections de u . Il est caractérisé par la propriété d'adjonction

$$T(Z, p_*(Y)) \simeq (T/X)(Z \times X, Y).$$

Dans ce cadre, pour tout $A \in Ab(T)$, on dispose de

$$\mathbb{R}^i p_*(A) \in Ab(T).$$

Il s'agit du *faisceau de cohomologie de X à coefficients dans A* .

2 Cohomologie étale

Soit A un anneau commutatif quelconque. Nous avons construit au cours précédent $Sh(A_{et})$, le petit topos étale de A . Nous allons maintenant considérer $Sh(A)$, le gros site étale de A . Il s'agit de la catégorie des foncteurs

$$A - Alg \longrightarrow Ens,$$

de la catégorie des A -algèbres commutatives vers celle des ensembles, vérifiant les conditions de descente étale :

1. $F(\prod_i A_i) \simeq \prod_i F(A_i)$ pour tout produit fini de A -algèbres A_i
2. si $A' \longrightarrow A''$ est un recouvrement étale alors

$$F(A') \simeq \lim (F(A'') \rightrightarrows F(A'' \otimes_{A'} A'')).$$

On dispose d'un foncteur évident de restriction

$$Sh(A) \longrightarrow Sh(A_{et})$$

qui restreint un foncteur à la sous-catégorie de $A - Alg$ formée des A -algèbres étales sur A .

Soit X un système d'équations polynômiales à coefficients dans A

$$X : \begin{cases} F_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ F_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ F_p(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

Par homogénéisation on obtient un système d'équations homogènes

$$\bar{X} : \begin{cases} \bar{F}_1(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \bar{F}_2(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \bar{F}_p(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

On définit alors un objet $\bar{X} \in Sh(A)$, du gros topos étale de A de la manière suivante. On commence par le foncteur

$$A - Alg \longrightarrow Ens$$

qui associe à B l'ensemble des solutions $F(B)$ définis de la manière suivante. Pour toute A -algèbre B , on considère $(B^{n+1})^* \subset B^{n+1}$ le sous-ensemble de B^{n+1} formé des éléments $(x_0, \dots, x_n)$ tels que l'idéal $(x_0, \dots, x_n)$ soit l'idéal total B (i.e. il existe des b_i dans B tels que $\sum_i b_i x_i = 1$). Le groupe B^* des éléments inversibles opère sur $(B^{n+1})^*$ par dilatation. On pose alors

$$F(B) := \{(x_*) \in (B^{n+1})^* / \bar{F}_i(x_*) = 0 \forall i\} / B^* \subset (B^{n+1})^* / B^*.$$

Le foncteur F n'est cependant pas un faisceau pour la topologie étale, et l'on définit $\bar{X} \in Sh(A)$ comme étant le faisceau associé à F . On peut alors définir la cohomologie étale de $\bar{X}$ en considérant la

projection $p_* : Sh(A)/X \longrightarrow Sh(A)$ composée avec le foncteur de restriction $r : Sh(A) \longrightarrow Sh(A_{et})$. On trouve ainsi, pour tout $\Lambda \in Ab(T)$

$$\underline{H}_{et}^i(\bar{X}, \Lambda) := r(\mathbb{R}^i p_*(\Lambda)) \in Ab(Sh(A_{et})).$$

Lorsque $A = K$ est un corps séparablement clos, $Sh(K_{et}) \simeq Ens$ et on pose alors la définition suivante, pour ℓ un nombre premier non-nul dans A .

Définition 2.1 Avec les notations ci-dessus et si $A = K$ est un corps séparablement clos on définit la cohomologie ℓ -adique de $\bar{X}$ par

$$\underline{H}_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) := \left(\lim_m \underline{H}_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^m) \right) \otimes \mathbb{Q} \in Vect(\mathbb{Q}_\ell).$$

3 Théorèmes généraux sur la cohomologie étale

On se fixe dans cette section un nombre premier ℓ , que nous supposons inversible dans A . On suppose aussi que A est une $\mathbb{Z}$ -algèbre commutative de type finie. Nous allons donner un certain nombre d'énoncés généraux sur la cohomologie étale dont les preuves sont au-delà du contenu de ce cours. Voir [Mi, Fr-Ke] pour plus de détails.

On fixe un système d'équations homogènes à coefficients dans A

$$\bar{X} : \begin{cases} \bar{F}_1(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \bar{F}_2(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \bar{F}_p(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

Pour tout morphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ on notera $\bar{X}_B$ le même système mais où les polynômes $\bar{F}_i$ seront vus à coefficients dans B par le morphisme u .

En tant qu'objet de $Sh(A)$, $\bar{X}$ est recouvert par des objets *affines*, c'est à dire par des foncteurs coreprésentables $A - Alg \longrightarrow Ens$. De manière plus explicite, on peut fixer l'une des variables X_j égale à 1 (pour un j fixé dans $\{0, \dots, n\}$), et obtenir des équations à n variables

$$\bar{F}_{i,j}(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) \in A[X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n].$$

On trouve ainsi un nouveau système

$$\bar{X}_j : \begin{cases} \bar{F}_1(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) = 0 \\ \bar{F}_2(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \bar{F}_p(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

Ce système définit, pour tout j , une A -algèbre

$$B_j := A[X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n] / (\bar{F}_{i,j}).$$

Ces A -algèbres coreprésentent des foncteurs

$$\text{spec } B_j : A - \text{Alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

qui envoient A' sur $\text{Hom}(B_j, A')$, et définissent ainsi des objets $\text{Spec } B_j \in \text{Sh}(A)$. Ces morphismes forment un atlas de $\bar{X}$ au sens où chaque $\text{Spec } B_j$ est canoniquement un sous-objet de $\bar{X}$, et $\bar{X}$ en est leur réunion (on peut aussi dire que ces sous-foncteurs sont "ouverts" en un certain sens).

Nous dirons alors que $\bar{X}$ est lisse sur A , si chaque A -algèbre B_j ci-dessus est une A -algèbre lisse : localement pour la topologie étale elle est isomorphe à $A[T_1, \dots, T_m]$ une algèbre de polynômes sur A . Cette condition est automatique si les équations de départ $\bar{F}_i$ vérifient le critère Jacobien, mais elle est moins forte. Si $\bar{X}$ est lisse sur A , alors pour tout corps K et tout morphisme $A \rightarrow K$, $\bar{X}_K$ est lisse sur K .

Théorème de changement de base propre et lisse.

Théorème 3.1 *Si $\bar{X}$ est lisse sur A , alors les faisceaux*

$$\underline{H}_{\text{et}}^i(\bar{X}, \mathbb{Z}/l^m) \in \text{Ab}(A_{\text{et}})$$

sont localement constants pour tout i .

Le corollaire important pour nous sera le suivant.

Corollaire 3.2 *Si $\bar{X}$ est lisse sur A , alors pour tout corps séparablement clos K et K' , et tout morphisme $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow K'$ les $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels*

$$H_{\text{et}}^i(\bar{X}_K, \mathbb{Q}_\ell) \quad H_{\text{et}}^i(\bar{X}_{K'}, \mathbb{Q}_\ell)$$

sont de même dimension.

Kunneth et Poincaré. On suppose maintenant que $A = K$ est un corps séparablement clos. Alors, la construction $\bar{X} \mapsto H_{\text{et}}^*(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ satisfait les propriétés formelles d'une théorie cohomologique, comme nous l'avons vu aux cours précédents. Nous notons en particulier les deux énoncés suivants, formule de Kunneth et dualité de Poincaré.

Pour commencer, on définit Var_K la sous-catégorie pleine de $\text{Sh}(K)$ formée des objets de la forme $\bar{X}$, pour un système $\bar{X}$ quelconque lisse sur K . Il s'agit, par définition, de la catégorie des variétés lisses et projectives sur K (et connexes). La cohomologie ℓ -adique définit un foncteur

$$H_{\text{et}}^*(-, \mathbb{Q}_\ell) : \text{Var}_K^o \longrightarrow \text{Vect}^{gr}(\mathbb{Q}_\ell)$$

vers les $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces gradués. Le formule de Kunneth se résume ainsi.

Proposition 3.3 *Le foncteur ci-dessus possède une structure monoïdale symétrique naturelle.*

De plus, notons $\dim \bar{X}$ la dimension de $\bar{X}$ comme variété algébrique sur K . Cette dimension peut être définie, par exemple, comme le degré de transcendance du corps des fractions rationnelles sur $\bar{X}$ (prendre le corps des fractions d'un des anneaux B_j construits ci-dessus). La dualité de Poincaré est alors l'énoncé suivant.

Proposition 3.4 *Il existe un morphisme d'intégration*

$$\int_{\bar{X}} : H_{et}^{2dim X}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

qui induit un accouplement non-dégénéré

$$\langle -, - \rangle = \int_{\bar{X}} (-, -) : H_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H_{et}^{2dim X - i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell.$$

Nous avons vu une idée des preuves des propositions ci-dessus dans le cadre topologique. Les preuves dans le cadre algébrique sont très similaires, étant donné le théorème de Morel-Voevodsky sur les espaces de Thom d'immersions fermées de variétés lisses. Le cas des espaces projectifs est traité à la main, et l'on construit la classe fondamentale de $\bar{X}$ en considérant l'immersion $j : \bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ et l'image directe en cohomologie induite (à l'aide de l'isomorphisme de Thom)

$$j_* : H_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_{et}^{i+2n-2dim X}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}_\ell).$$

Le corollaire important des deux propositions précédentes est l'existence d'une catégorie monoïdale symétrique rigide $Corr_K$ des variétés algébriques sur K analogue à celle que nous avons construite pour la formule des traces de Lefschetz. On en déduit à l'aide de la formule des traces formelle (voir cours 4 Cor. 2.2), la formule des traces de Grothendieck.

Corollaire 3.5 *Soit $f : \bar{X} \longrightarrow \bar{X}$ un endomorphisme d'une variété projective lisse sur K . On suppose que les points fixes de f sont isolés et non-dégénérés. Alors on a*

$$|\{x \in \bar{X}(K) / f(x) = x\}| = \sum_i (-1)^i Tr(f^* : H_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Le cas particulier qui nous intéresse sera la suivant. Supposons que $A = \mathbb{F}_q$ et $\bar{X}$ lisse sur $\mathbb{F}_q$. Tout objet $F \in Sh(\mathbb{F}_q)$ possède une endomorphisme canonique

$$Fr : F \longrightarrow F.$$

Pour $A \in \mathbb{F}_q$ l'endomorphisme $Fr : F(A) \longrightarrow F(A)$ est l'image par F de l'endomorphisme $a \mapsto a^q$ de A .

L'endomorphisme induit un endomorphisme $Fr : \bar{X}_{\bar{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow \bar{X}_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ et l'on peut alors appliquer la formule des traces précédentes. L'endomorphisme

$$Fr : \bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow \bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_q)$$

est naturellement induit par le Frobenius $x \mapsto x^q$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, et ainsi les points fixes de Fr^m forment exactement l'ensemble $\bar{X}(\mathbb{F}_{q^m})$. On a donc

$$|\bar{X}(\mathbb{F}_{q^m})| = \sum_i (-1)^i Tr(Fr^* : H_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Le corollaire immédiat est la rationalité de la fonction Zêta

$$Z(\bar{X}, T) := \exp\left(-\sum_m \frac{|\bar{X}(\mathbb{F}_{q^m})|}{m} T^m\right).$$

Corollaire 3.6

$$Z(\bar{X}, T) = \prod_i \det(\text{Id} - Fr^*T)^{(-1)^i}$$

Comparaison avec la cohomologie de Betti.

Supposons maintenant que $A = \mathbb{C}$. Alors, on dispose d'une comparaison entre la cohomologie ℓ -adique de $\bar{X}$ et la cohomologie ℓ -adique de l'espace topologique $\bar{X}(\mathbb{C})$. Il s'agit d'une extension cohomologique du *théorème d'existence de Riemann* qui affirme qu'un revêtement fini d'une variété algébrique peut être réalisé par des équations algébriques.

Proposition 3.7 *On a des isomorphismes naturels*

$$H_{et}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(\bar{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_\ell).$$

Hypothèse de Riemann. Enfin, nous signalons le théorème suivant, dû à Deligne, sur l'hypothèse de Riemann. Il s'agit de la partie la plus délicate parmi tous les énoncés précédents.

Théorème 3.8 *Supposons que $A = \mathbb{F}_q$ et $\bar{X}$ lisse sur $\mathbb{F}_q$. Alors, les valeurs propres de*

$$Fr^* : H_{et}^i(\bar{X}_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_{et}^i(\bar{X}_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$$

sont des nombres algébriques $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ de Weil de poids i : pour tout plongement $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ on a

$$|j(\alpha)| = q^{i/2}.$$

4 Retour sur les conjectures de Weil

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème final de ce cours, et de voir comment il se déduit des énoncés généraux de la section précédente.

Théorème 4.1 *Soit $\bar{X}$ un système d'équations homogènes sur $\mathbb{Z}$.*

1. *Si $\bar{X}(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, alors $\bar{X}$ est lisse sur $\mathbb{Z}[1/m]$ pour un m assez grand.*
2. *Soit $p \nmid m$ un nombre premier ne divisant pas m . Alors la fonction Zêta $Z(\bar{X}_{\mathbb{F}_p}, T)$ est rationnelle.*
3. *On a*

$$\deg(Z(\bar{X}_{\mathbb{F}_p}, T)) = \chi(\bar{X}(\mathbb{C})).$$

4. *Les zéros et les pôles de $Z(\bar{X}_{\mathbb{F}_p}, T)$ sont des nombres de Weil de poids i pour $0 \leq i \leq 2\dim \bar{X}_{\mathbb{F}_p}$. En particulier, on dispose d'une factorisation unique (à scalaire inversible près)*

$$Z(\bar{X}_{\mathbb{F}_p}, T) = \prod_i Z_i(\bar{X}_{\mathbb{F}_p}, T)$$

où Z_i ne possède que des pôles et des zéros qui sont des nombres de Weil de poids exactement i .

5. *On a pour tout i*

$$\deg(Z_i(\bar{X}, T)) = b_i(\bar{X}(\mathbb{C})).$$

Pour la preuve, il suffit de combiner les résultats 3.2, 3.6, 3.7 et 3.8.

Références

- [Mi] Milne, James S. *Étale cohomology*. Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. xiii+323 pp.
- [Fr-Ke] Freitag, Eberhard ; Kiehl, Reinhardt *Étale cohomology and the Weil conjecture*. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse. With an historical introduction by J. A. Dieudonné. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, 13. Springer-Verlag, Berlin, 1988.