Cours 1: Reflexions sur la notion d'espace I

Le but de ces premiers cours est de comprendre la notion de variété dans divers contextes (variétés topologiques, différentielles, analytiques ...). Pour cela on commencera dans ce premier cours par regarder la cas des variétés topologiques.

1 Rappels sur les variétés topologiques

Définition 1.1 *1. Une* variété topologique *est un espace topologique X qui possède un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ tel que pour chaque $i \in I$ il existe un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n_i}$ (pour un certain entier $n_i \geq 0$ dépendant de i).*

2. La catégorie des variétés topologiques *est la sous-catégorie pleine de celle des espaces topologiques dont les objets sont les variétés topologiques. Elle est notée $VarTop$.*

Soit X une variété topologique et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert comme dans la définition 1.1 (1) ci-dessus. On pose, pour i et j dans I, $U_{i,j} := U_i \cap U_j$. On dipose d'un diagramme d'espaces topologiques

$$\coprod_{(i,j)\in I^2} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} U_i,$$

où le premier morphisme envoit la composante $U_{i,j}$ dans U_i par l'inclusion naturelle $U_{i,j} \subset U_i$, et le second morphisme envoit $U_{i,j}$ dans U_j par l'inclusion naturelle $U_{i,j} \subset U_j$. Il existe aussi un morphisme naturel

$$\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$$

somme des inclusions $U_i \subset X$, qui égalise les deux morphismes ci-dessus. On obtient ainsi un morphisme bien défini d'espaces topologiques

$$Colim\left(\coprod_{(i,j)\in I^2} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} U_i\right) \longrightarrow X.$$

Le fait important est le suivant.

Lemme 1.2 *Le morphisme*

$$Colim\left(\coprod_{(i,j)\in I^2} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} U_i\right) \longrightarrow X$$

est un isomorphisme.

Preuve: Le lemme dit que pour un espace topologique Y, se donner un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est la même chose que de se donner pour tout $i \in I$ un morphisme $f_i : U_i \longrightarrow Y$ tel que $(f_i)_{|U_{i,j}} = (f_j)_{|U_{i,j}}$ pour tout $(i,j) \in I^2$. (Exo: faire les détails). $\Box$

Il faut interpréter le lemme précédent de la façon suivante: toute variété topologique est obtenue comme colimite d'un diagramme d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour n variable). On tire de cela le principe suivant:

La catégorie $VarTop$ des variété topologique se déduit de la catégorie des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (et applications continues).

C'est ce principe que nous allons clarifier dans la suite.

2 Variétés et faisceaux

Soit C la sous-catégorie pleine de $VarTop$ dont les objets sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour n variable). On note $Pr(C)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur C (notée aussi $\widehat{C}$). On considère le plongement de Yoneda restreint à C

$$\begin{array}{cccc} h_- : & VarTop & \longrightarrow & Pr(C) \\ & X & \mapsto & h_X, \end{array}$$

où le préfaisceau h_X est défini par

$$h_X(Y) := Hom_{VarTop}(Y, X),$$

pour tout $Y \in C \subset VarTop$.

Lemme 2.1 *Le foncteur h_- ci-dessus est pleinement fidèle.*

Preuve: Le foncteur est fidèle: pour deux morphismes $f, g : X \longrightarrow X'$, on considère un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X tel que $U_i \in C$ (ceci existe car X est une variété. Si $h_f = h_g$, alors pour tout i les deux applications

$$h_f(U_i) = h_g(U_i) : Hom(U_i, X) = h_X(U_i) \longrightarrow Hom(U_i, X') = h_{X'}(U_i)$$

sont égales. Ceci veut dire que $f_{|U_i} = g_{|U_i}$ pour tout i, et donc que $f = g$.

Le foncteur est plein: Soit X et X' deux variétés topologiques et $u : h_X \longrightarrow h_{X'}$ un morphisme dans $Pr(C)$. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de X avec $U_i \in C$. Pour tout i, le morphisme u induit une application

$$h_X(U_i) = Hom(U_i, X) \longrightarrow h_{X'}(U_i) = Hom(U_i, X').$$

L'image par cette application des inclusions $U_i \subset X$ donne des morphismes $f_i : U_i \longrightarrow X'$ pour tout i. Pour tout i et j dans I, les éléments $(f_i)_{|U_{i,j}} \in h_{X'}(U_{i,j})$ et $(f_j)_{|U_{i,j}} \in h_{X'}(U_{i,j})$ sont tous deux images du morphismes d'inclusion $U_{i,j} \subset X$ par l'application $h_X(U_{i,j}) \longrightarrow h_{X'}(U_{i,j})$, et sont donc égaux (rappel: $U_{i,j} = U_i \cap U_j$). Ainsi, les morphismes $f_i : U_i \longrightarrow X'$ se recollent pour définir un morphisme $f : X \longrightarrow X'$. Par construction a $h_f = u$. $\Box$

Le lemme 2.1 est un bon point de départ, on sait que $VarTop$ s'identifie (à équivalence près) à une sous-catégorie pleine de $Pr(C)$. On cherche maintenant à caractériser cette sous-catégorie.

On commence par faire de C un site de Grothendieck en décrétant qu'une famille de morphismes $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ dans C est une famille couvrante si chaque morphisme $U_i \longrightarrow U$ est une immersion ouverte, et si l'application totale $\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow U$ est surjective. Ceci définit une pré-topologie sur C (Exo: le vérifier), dont la topologie associée est notée τ.

Lemme 2.2 *Pour tout $X \in VarTop$ le préfaisceau $h_X \in Pr(C)$ est un faisceau pour la topologie τ.*

Preuve: C'est une autre façon de dire que pour une variété topologique Y et un recouvrement ouvert $\{U_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$, se donner une application continue de Y vers X est la même chose que se donner des applications continues f_i de U_i vers X telles que f_i et f_j coincident sur $U_i \cap U_j$. $\square$

Ainsi, le lemme 2.2 implique que l'on dispose d'un foncteur pleinement fidèle

$$h_- : VarTop \longrightarrow Sh(C,\tau).$$

Un faisceau isomorphe à h_X sera dit *représentable par X*. De façon générale nous identifierons la catégorie $VarTop$ avec son image dans $Sh(C,\tau)$.

Pour caractériser l'image on pose la définition suivante.

Définition 2.3
1. *Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ dans $Sh(C,\tau)$ est un homéomphisme local si pour tout $X \in C$, et tout morphisme $h_X \longrightarrow G$, le faisceau $F \times_G h_X$ est représentable par $Y \in VarTop$, et le morphisme induit $Y \longrightarrow X$ par la projection $F \times_G h_X \simeq h_Y \longrightarrow h_X$ est un homéomorphisme local d'espace topologique*[1].

2. *Un morphisme dans $Sh(C,\tau)$ est une* immersion ouverte *si c'est un monomorphisme et un homéomorphisme local.*

On vérifie facilement que les immersions ouvertes dans $Sh(C,\tau)$ sont stables par compositions (Exo: le vérifier). On peut aussi vérifier que les homéomorphismes locaux sont stables par composition, mais cela demande de connaitre le corollaire 2.5 plus bas (Exo: le vérifier). On montre aussi qu'un morphisme de variétés topologiques $X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme local d'espaces topologiques si et seulement si $h_X \longrightarrow h_Y$ est un homéomorphisme local au sens de la définition précédente (Exo: le vérifier).

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Un faisceau $F \in Sh(C,\tau)$ est représentable par une variété topologique (i.e. $F \simeq h_X$ pour un certain $X \in VarTop$), s'il existe une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'objets de C, et un morphisme de faisceaux*

$$p : \coprod_{i\in I} h_{U_i} \longrightarrow F$$

vérifiant les deux conditions suivantes.

1. *Le morphisme p est un épimorphisme de faisceaux.*

2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $U_i \longrightarrow F$ est une immersion ouverte (au sens de la définition 2.3).*

[1] Rappel: une application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est un homéomorphisme local si pour tout $x \in X$, il existe U un voisinage ouvert de x dans X et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y, tel que f induise un homéomorphisme de U dans V.

Preuve: Commençons par supposer que F est représentable par une variété topologique X. On choisit un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X avec $U_i \in C$, et on considère le morphisme naturel

$$p : \coprod_{i\in I} h_{U_i} \longrightarrow F \simeq h_X$$

induit par les inclusions $U_i \subset X$. Pour $Y \in C$, et $f : Y \longrightarrow X$ un élément de $h_X(Y)$ on regarde $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ qui est un recouvrement ouvert de Y. De plus, pour tout $i \in I$ il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U_i) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

ce qui montre que f est localement dans l'image du morphisme p. Ceci implique que p est un épimorphisme de faisceaux. De plus, pour $Y \in C$ et pour tout morphisme $h_Y \longrightarrow h_X$, correspondant à un morphisme $f : Y \longrightarrow X$, on a

$$h_{U_i} \times_{h_X} h_Y \simeq h_{U_i \times_X Y} = h_{f^{-1}(U_i)}.$$

Comme $f^{-1}(U_i) \longrightarrow Y$ est une immersion ouverte on voit que chaque morphisme $h_{U_i} \longrightarrow F$ est une immersion ouverte.

Inversement, supposons que F soit un faisceau satisfaisant aux deux conditions de la proposition. On commence par reconstruire un espace topologique X de la façon suivante: soit $\{U_i\}_i$ une famille d'objets de C et $p : \coprod h_{U_i} \longrightarrow F$ un morphisme comme dans l'énoncé de la proposition. On pose $U = \coprod_i U_i \in VarTop$. On remarque que le morphisme naturel

$$\coprod h_{U_i} \longrightarrow h_U$$

est un isomorphisme dans $Sh(C,\tau)$ (Exo: vérifier ceci). On considère les deux projections

$$h_U \times_F h_U \rightrightarrows h_U.$$

Par hypothèse on a

$$h_U \times_F h_U \simeq h_R,$$

où $R = \coprod_{i,j} U_{i,j}$, avec $h_{U_{i,j}} \simeq h_{U_i} \times_F h_{U_j}$ (ainsi chaque $U_{i,j}$ est isomorphe à un ouvert de U_i et de U_j). Par les lemmes 2.1 et 2.2 le diagramme

$$h_R \rightrightarrows h_U$$

est l'image par h d'un diagramme de variétés topologiques $R \rightrightarrows U$. On pose

$$X := colim\,(R \rightrightarrows U)\,,$$

où la colimite est prise dans la catégorie des espaces topologiques. Noter que R est un relation d'équivalence sur U et que X est sont quotient.

On commence par remarquer que X est une variété topologique. Pour cela, par définition le morphisme naturel $U \longrightarrow X$ est surjectif. De plus, $U_i \longrightarrow X$ est une immersion ouverte. En effet, comme $h_{U_i} \longrightarrow F$ est un monomorphisme, on a $U_{i,i} = U_i$, ce qui implique que $U_i \longrightarrow X$ est injectif (Exo: vérifier ceci). De plus, un sous-ensemble $V \subset X$ est ouvert si et seulement son image réciproque dans U par la projection $U \longrightarrow X$ est un ouvert. Mais, l'image inverse de $U_i \subset X$ par cette projection est le sous-ensemble $\coprod_j U_{i,j}$ de

U qui est bien un ouvert. Ceci montre que X est recouvert par les ouverts $U_i \in C$, et donc est une variété topologique.

Il nous reste à montrer que F est h_X sont isomorphes. Il existe un morphisme naturel de faisceaux

$$colim\,(h_R \rightrightarrows h_U) \longrightarrow h_X.$$

Comme $h_U \longrightarrow F$ est un épimorphisme, et que les épimorphismes de faisceaux sont effectifs, on sait que le membre de gauche est naturellement isomorphe à F. Il nous reste donc à montrer que le morphisme ci-dessus est un isomorphisme de faisceaux. Comme le morphisme $h_U \longrightarrow h_X$ est aussi un épimorphisme de faisceaux (Exo: le vérifier), il nous faut montrer que le morphisme naturel

$$h_R \longrightarrow h_U \times_{h_X} h_U$$

est un isomorphisme. Comme h est pleinement fidèle et commute aux limites il suffit de vérifier que le morphisme naturel

$$R \longrightarrow U \times_X U$$

est un isomorphisme. Ce qui est vrai car le morphisme naturel $U_{i,j} \longrightarrow U_i \times_X U_j$ est un isomorphisme (c'est un homéomorphisme local bijectif). $\square$

Corollaire 2.5 *Soit $X \in VarTop$, et $F \longrightarrow X$ un morphisme de faisceaux. S'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$ le faisceau $F \times_{h_X} h_{U_i}$ soit représentable par une variété topologique, alors F est représentable par une variété topologique.*

Preuve: Pour tout $i \in I$, on choisit $\{V_{i,j}\}_{j\in J}$, et $\coprod_j h_{V_{i,j}} \longrightarrow F \times_{h_X} h_{U_i}$ comme dans la proposition 2.4. On vérifie alors que

$$\coprod_{i,j} h_{V_{i,j}} \longrightarrow F$$

est un morphisme comme dans la proposition 2.4 (Exo: le vérifier). $\square$

3 Variétés quotients

Soit G un groupe (discret) qui opère sur une variété topologique $X \in VarTop$. Par fonctorialité le groupe G opère sur le faisceau h_X. Rappelons que l'action de G sur X est libre si pour tout $x \in X$ et $g \in G$ on a $(g.x = x) \Rightarrow (g = e)$. Rappelons aussi que l'action de G sur X est *totalement discontinue* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert $U \subset X$ tel que pour tout $g \in G$ on a

$$(g(U) \cap U \neq \emptyset) \Rightarrow (g = e).$$

Dans l'énoncé suivant on prendra garde de ne pas confondre le faisceau quotient h_X/G du faisceau $h_{X/G}$ représenté par l'espace topologique quotient X/G.

Proposition 3.1 *1. Si l'action de G sur X est libre alors le morphisme quotient*

$$h_X \longrightarrow h_X/G$$

est un homéomorphisme local.

2. *Si l'action de G sur X est totalement discontinue alors le faisceau quotient $h_X/G \in Sh(C,\tau)$ est une variété topologique.*

Preuve: (1) Soit $Y \in C$ et $h_Y \longrightarrow h_X/G$ un morphisme de faisceaux. Il faut commencer par montrer que $h_X \times_{h_X/G} h_Y$ est une variété topologique. Comme le morphisme quotient $h_X \longrightarrow h_X/G$ est un épimorphisme, il existe un recouvrement ouvert $\{Y_i\}$ de Y et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \coprod_i h_{Y_i} \arrow[r] \arrow[d] & h_Y \arrow[d] \\ h_X \arrow[r] & h_X/G. \end{tikzcd}$$

Le corollaire 2.5 appliqué au morphisme

$$h_X \times_{h_X/G} h_Y \longrightarrow h_Y$$

implique qu'il nous suffit de montrer que chaque $h_X \times_{h_X/G} h_{Y_i}$ est une variété. On a

$$h_X \times_{h_X/G} h_{Y_i} \simeq (h_X \times_{h_X/G} h_X) \times_{h_X} h_{Y_i}.$$

Or, $h_X \times_{h_X/G} h_X \simeq h_X \times h_G$ comme on peut le vérifier au niveaux des préfaisceaux d'ensembles (Exo: le vérifier). Ainsi, on a

$$h_X \times_{h_X/G} h_{Y_i} \simeq h_{Y_i} \times h_G \simeq h_{Y_i \times G}.$$

Ceci finit de montrer que $h_X \times_{h_X/G} h_Y$ est une variété topologique. De plus, le morphisme de variétés

$$h_X \times_{h_X/G} h_Y \longrightarrow h_Y$$

est, après restriction au recouvrement $\{Y_i\}$, isomorphe à la projection

$$h_{Y_i} \times h_G \longrightarrow h_{Y_i}.$$

Comme ce morphisme est un homéomorphisme local, ceci implique que le morphisme $h_X \times_{h_X/G} h_Y \longrightarrow h_Y$ est un homéomorphisme local.

(2) Pour tout $x \in X$ soit U_x un voisinage ouvert de x dans X tel que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ pour tout $g \neq e$ dans G. On considère le morphisme naturel

$$h_{U_x} \longrightarrow h_X/G.$$

Par le point (1), ce morphisme est une composition d'homéomorphismes locaux ($h_{U_x} \longrightarrow h_X \longrightarrow h_X/G$) et donc est un homéomorphisme local. De plus, on a

$$h_{U_x} \times_{h_X/G} h_{U_x} \simeq (h_{U_x} \times_{h_X/G} h_X) \times_{h_X} h_{U_x} \simeq (h_{U_x} \times h_G) \times_{h_X} h_{U_x},$$

comme nous l'avons vu lors de la preuve du point (1). Enfin, on a

$$(h_{U_x} \times h_G) \times_{h_X} h_{U_x} \simeq h_{(U_x \times G) \times_X U_x}.$$

D'après le choix de U_x, on a $(U_x \times G) \times_X U_x \simeq U_x$ (Exo: le vérifier). Ainsi, on a montré que le morphisme diagonal

$$h_{U_x} \longrightarrow h_{U_x} \times_{h_X/G} h_{U_x}$$

est un isomorphisme, ou en d'autres termes que le morphisme

$$h_{U_x} \longrightarrow h_X/G$$

est un monomorphisme. Ceci montre que pour tout $x \in X$ le morphisme

$$h_{U_x} \longrightarrow h_X/G$$

est une immersion ouverte. Comme le morphisme total

$$\coprod_{x \in X} h_{U_x} \longrightarrow h_X \longrightarrow h_X/G$$

est un épimorphisme, ceci finit la preuve de la proposition. $\square$

Le corollaire précédent implique que le quotient X/G existe aussi dans la catégorie $VarTop$ (car h est pleinement fidèle), mais il est un énoncé plus fort.

4 Critique des variétés

La proposition 3.1 est un bon moyen pour construire des exemples de variétés topologiques par des actions totalement discontinues. Cependant, lorsque un groupe G opère librement sur une variété X mais que cette action n'est pas totalement discontinue, l'espace topologique quotient X/G est en général très pathologique. Le faisceau quotient h_X/G lui possède de meilleures propriétés (e.g. le point (1) de la proposition 3.1), même s'il n'est plus représentable par une variété topologique.

Un exemple frappant est le suivant: on fait agir le groupe discret $\mathbb{Q}$ (pour la loi additive) sur l'espace topologique $\mathbb{R}$ par le morphisme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donné par $(x, t) \mapsto x + t$. On voit que cette action est libre, mais pas totalement discontinue. De plus, le morphisme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas un homéomorphisme local car il n'est pas localement injectif. Enfin, l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est muni de la topologie grossière (car ses ouverts sont les ouverts invariants de $\mathbb{R}$). Ceci montre que le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas un objet raisonable d'un point de vue géométrique. En contre partie, le faisceau quotient $h_{\mathbb{R}}/\mathbb{Q}$ semble plus intéressant, car le morphisme $h_{\mathbb{R}} \longrightarrow h_{\mathbb{R}}/\mathbb{Q}$ étant un homéomorphisme local on peut légitimement penser que $h_{\mathbb{R}}/\mathbb{Q}$ est d'une certaine façon localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$. Le faisceau $h_{\mathbb{R}}/\mathbb{Q}$ est le tout premier exemple d'un *espace géométrique.*

Définition 4.1 *Un faisceau $F \in Sh(C, \tau)$ est un* espace géométrique *s'il existe une famille d'objets $\{U_i\}_{i \in I}$ de C, et un morphisme de faisceaux*

$$p : \coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$$

vérifiant les deux conditions suivantes.

1. *Le morphisme p est un épimorphisme de faisceaux.*
2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $U_i \longrightarrow F$ est un homéomorphisme local (au sens de la définition 2.3).*

La proposition 3.1 nous dit par exemple que le faisceau quotient h_X/G, pour une action libre de G sur une variété X, est un espace géométrique. Un exemple d'espace géométrique est donc $h_{\mathbb{R}}/\mathbb{Q}$ décrit ci-dessus. Un autre exemple est $h_{\mathbb{R}}/(\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z})$, où $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Les espaces géométriques forment une sous-catégorie pleine de $Sh(C,\tau)$. Cette catégorie sera étudiée plus en détails au cours suivant.