Cours 5: Champs I

On rappelle que pour une catégorie C et un sous-ensemble $W \subset C_1$ de morphismes dans C, une localisation de C le long de W est une catégorie $W^{-1}C$ munie d'un foncteur $l : C \longrightarrow W^{-1}C$ qui est tel que pour toute catégorie D, le foncteur

$$l^* : \underline{Hom}(W^{-1}C, D) \longrightarrow \underline{Hom}(C, D)$$

soit pleinement fidèle et son image essentielle consiste en les foncteurs $C \longrightarrow D$ envoyant W sur des isomorphismes dans D. On montre qu'une localisation existe toujours, et est unique à équivalence près.

1 Théorie homotopique des groupoides

On considère le cas où $C = Gpd$ est le catégorie des groupoides (i.e. ses objets sont les groupoides et ses morphismes sont les foncteurs entre groupoides). On note W le sous-ensemble des équivalences de groupoides (i.e. des foncteurs qui sont des équivalences de catégories) et on cherche à décrire la catégorie $W^{-1}Gpd$.

Définition 1.1 *La* catégorie homotopique des groupoides *est la catégorie localisée $W^{-1}Gpd$. Elle est noté $Ho(Gpd)$. L'ensemble des morphismes dans $Ho(Gpd)$ entre deux objets A et B sera noté $[A, B]$.*

Notons maintenant $[Gpd]$ la catégorie dont les objets sont les groupoides, et pour deux tels groupoides A et B l'ensemble des morphismes de A vers B dans $[Gpd]$ est par définition l'ensemble des classes d'isomorphismes de foncteurs de A vers B (i.e. l'ensemble des classes d'isomorphismes de la catégorie $\underline{Hom}(A, B)$). On dispose d'une projection naturelle $p : Gpd \longrightarrow [Gpd]$, qui est l'identité sur les objets et la projection canonique sur les ensembles de morphismes. Exo: décrire la composition des morphismes dans $[Gpd]$.

Théorème 1.2 *La projection naturelle*

$$p : Gpd \longrightarrow [Gpd]$$

est une localisation de Gpd le long de W. Ainsi, p induit une équivalence naturelle

$$Ho(Gpd) \simeq [Gpd].$$

Preuve: On commence par remarquer que pour toute catégorie D le foncteur

$$p^* : \underline{Hom}([Gpd], D) \longrightarrow \underline{Hom}(Gpd, D)$$

est pleinement fidèle. En effet, comme p est surjectif sur les objets le foncteur p^* est fidèle (Exo: vérifier cela). De plus, comme p est surjectif sur les ensembles de morphismes le foncteur p^* est aussi plein (Exo: vérifier cela).

Il reste à montrer qu'un foncteur $F : Gpd \longrightarrow D$ qui envoie les morphismes de W sur des isomorphismes dans D est dans l'image essentielle de p^*. Par définition de la catégorie $[Gpd]$, le foncteur F se factorise par la projection canonique $Gpd \longrightarrow [Gpd]$ si et seulement si $F(f) = F(g)$ pour deux foncteurs entre groupoides $f, g : A \longrightarrow B$ qui sont isomorphismes. Soit donc deux tels foncteurs f et g et montrons que $F(f) = F(g)$.

Notons $\overline{\Delta}^1$ le groupoide avec deux objets 0 et 1 et un unique isomorphisme entre 0 et 1. On voit qu'il existe une bijection fonctorielle entre les foncteurs $\overline{\Delta}^1 \longrightarrow A$ est l'ensemble des isomorphismes dans A. Choisissons un isomorphisme naturel $\gamma : f \to g$. La transformation naturelle γ définit un morphisme de groupoides

$$h : A \times \overline{\Delta}^1 \longrightarrow B$$

de sorte à ce qu'il existe un diagramme commutatif de groupoides

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times \overline{\Delta}^1 \arrow[r, "h"] & B \\
A, \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

où $i_0 : A \longrightarrow A \times \overline{\Delta}^1$ est le foncteur $Id \times \{0\}$ et $i_1 : A \longrightarrow A \times \overline{\Delta}^1$ est le foncteur $Id \times \{1\}$. (Exo: décrire en détail le foncteur h à partir de γ). Notons $q : A \times \overline{\Delta}^1 \longrightarrow A$ la projection sur le premier facteur. On a $q \circ i_0 = q \circ i_1 = Id$. De plus, $i_0 \circ q$ et $i_1 \circ q$ sont tous deux naturellement isomorphes au foncteur identité de $A \times \overline{\Delta}^1$. Les foncteurs q, i_0 et i_1 sont donc des équivalences de catégories. Par hypothèse sur l'objet $F \in \underline{Hom}(Gpd, D)$, on trouve donc $F(i_0) = F(i_1) = F(q)^{-1}$. Ainsi, on a

$$F(f) = F(h) \circ F(i_0) = F(h) \circ F(q)^{-1} = F(h) \circ F(i_1) = F(g).$$

$\square$

Corollaire 1.3 *Le foncteur naturel*

$$j : Ens \longrightarrow Gpd \longrightarrow Ho(Gpd),$$

qui envoie un ensemble sur le groupoide discret correspondant, est pleinement fidèle et possède un adjoint à gauche

$$\pi_0 : Ho(Gpd) \longrightarrow Ens.$$

Preuve: On définit $\pi_0(A)$ comme étant l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans A. Le théorème 1.2 permet de vérifier facilement que j est pleinement fidèle et que π_0 est son adjoint à gauche. $\square$

Exo: Soit G et H deux groupes. On note BG (resp. BH) les groupoides avec un unique objet et G (resp. H) comme groupe d'automorphismes de cet objet. Décrire l'ensemble $[BG, BH]$ des morphismes de BG vers BH dans la catégorie $Ho(Gpd)$.

2 Théorie homotopique des diagrammes de groupoides

Soit I une catégorie, et considérons $\underline{Hom}(I, Gpd)$ la catégorie des foncteurs de I dans Gpd (aussi appelée la catégorie des I-diagrammes de Gpd). Soit $F, G : I \longrightarrow Gpd$ deux I-diagrammes. Nous dirons qu'un morphisme

$$f : F \longrightarrow G$$

dans $\underline{Hom}(I, Gpd)$ est une équivalence si pour tout objet $i \in I$, le morphisme induit

$$f_i : F(i) \longrightarrow G(i)$$

est une équivalence de groupoides. La notion d'équivalence définit un sous-ensemble W_I de morphismes dans $\underline{Hom}(I, Gpd)$.

Définition 2.1 *La* catégorie homotopique des I-diagrammes de groupoides *est* $W_I^{-1}\underline{Hom}(I, Gpd)$. *Elle sera notée* $Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$. *L'ensemble des morphismes enter* F *et* G *dans* $W_I^{-1}\underline{Hom}(I, Gpd)$ *sera noté* $[F, G]$.

La généralisation du théorème 1.2 au cas des diagrammes de groupoides nécessite d'introduire la notion de *morphismes faibles* entre objets de $\underline{Hom}(I, Gpd)$. Pour cela, nous noterons pour tout $F \in \underline{Hom}(I, Gpd)$, et tout morphisme $u : i \to j$ dans I, $u_*^F : F(i) \longrightarrow F(j)$ le foncteur induit par u. Notons que par définition on a $(u^F \circ v^F)_* = u_*^F \circ v_*^F$ et $id_*^F = id$.

Définition 2.2 *Soit* $F, G : I \longrightarrow Gpd$ *deux* I*-diagrammes de groupoides. Un* morphisme faible $f : F \longrightarrow G$ *consiste en les données suivantes.*

1. *Pour tout objet* $i \in I$*, un foncteur de groupoides*

$$f_i : F(i) \longrightarrow G(i).$$

2. *Pour tout morphisme* $u : i \to j$ *dans* I*, une transformation naturelle*

$$\gamma_u^f : u_*^G \circ f_i \to f_j \circ u_*^F.$$

   On suppose de plus que $\gamma_{id}^f = id$.

On demande de plus que ces données satisfassent la condition suivante: pour tout couple de morphismes $i \xrightarrow{u} j \xrightarrow{v} k$ *dans* I*, les deux transformations naturelles*

$$(v_*^G \circ \gamma_u^f) \circ (\gamma_v^f \circ u_*^F) : (v \circ u)_*^G \circ f_i = v_*^G \circ u_*^G \circ f_i \xrightarrow{v_*^G \circ \gamma_u^f} v^G \circ f_j \circ u_*^F \xrightarrow{\gamma_v^f \circ u_*^F} f_k \circ v_*^F \circ u_*^F = f_k \circ (v \circ u)_*^F$$

$$\gamma^f_{v\circ u} : (v \circ u)^G_* \circ f_i \longrightarrow f_k \circ (v \circ u)^F_*$$

sont équales

$$(v^G_* \circ \gamma^f_u) \circ (\gamma^f_v \circ u^F_*) = \gamma^f_{v\circ u}.$$

Soit F, G et H trois I-diagrammes de groupoides, et $f : F \longrightarrow G$ et $g : G \longrightarrow H$ deux morphismes faibles. On définit le morphisme faible composé $g \circ f : F \longrightarrow H$ par les données suivantes.

1. Pour tout objet $i \in I$
$$(g \circ f)_i := g_i \circ f_i : F(i) \longrightarrow H(i).$$

2. Pour tout morphisme $u : i \to j$ dans I, on la transformation naturelle $\gamma^{g\circ f}_u$ est définie par la composition
$$\gamma^{g\circ f}_u : \ u^H_* \circ g_i \circ f_i \xrightarrow{\gamma^g_u \circ f_i} g_j \circ u^G_* \circ f_i \xrightarrow{g_j \circ \gamma^f_u} g_j \circ f_j \circ u^F_*.$$
   En clair
$$\gamma^{g\circ f}_u := (g_j \circ \gamma^f_u) \circ (\gamma^g_u \circ f_i).$$

Exo: vérifier que cette composition est associative et unitaire.

Définition 2.3 *Soit $F, G : I \longrightarrow Gpd$ deux I-diagrammes de groupoides, et $f, g : F \longrightarrow G$ deux morphismes faibles. Une* transformation naturelle *entre f et g est la donnée de pour tout objet $i \in I$ d'une transformation naturelle*
$$\phi_i : f_i \to g_i$$
tel que pour tout morphisme $u : i \to j$ dans I on ait
$$u^G_* \circ \phi_i = \phi_j \circ u^F_*.$$

La définition précédente permet de définir pour deux I-diagrammes de groupoides F et G comme ci-dessus une catégorie $\underline{Hom}^{lax}(F, G)$, dont les objets sont les morphismes faibles et les morphismes sont les transformations naturelles (Exo: décrire la composition des morphismes dans cette catégorie). On voit que la catégorie $\underline{Hom}^{lax}(F, G)$ est en réalité un groupoide (Exo: le vérifier). La composition des morphismes faibles décrite plus haut définit un foncteur

$$\underline{Hom}^{lax}(F, G) \times \underline{Hom}^{lax}(G, H) \longrightarrow \underline{Hom}^{lax}(F, H).$$

Pour F et G fixés, on notera $\underline{Hom}(F, G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}^{lax}(F, G)$ formé des morphismes faibles f tels que $\gamma^f_u = id$ pour tout morphisme u dans I. Ces morphismes sont aussi les morphismes de I-diagrammes (i.e. les morphismes entre F et G dans la catégorie $\underline{Hom}(I, Gpd)$), et seront appelés des *morphismes stricts.*

On définit une catégorie $[\underline{Hom}(I, Gpd)]$, dont les objets sont les I-diagrammes de groupoides, et dont les morphismes sont les classes d'isomorphismes de morphismes faibles. Un morphisme de I-diagrammes de groupoides étant aussi un morphisme faible (pour lequel $\gamma_u = id$ pour tout u), on dispose d'un foncteur naturel

$$\underline{Hom}(I, Gpd) \longrightarrow [\underline{Hom}(I, Gpd)],$$

qui vaux l'identité sur l'ensemble des objets.

Théorème 2.4 *Le foncteur naturel*

$$\underline{Hom}(I, Gpd) \longrightarrow [\underline{Hom}(I, Gpd)]$$

induit une équivalence

$$Ho(\underline{Hom}(I, Gpd)) \simeq [\underline{Hom}(I, Gpd)].$$

*Preuve:*Il s'agit d'une preuve similaire, mais un peu plus compliquée, que celle du théorème 1.2. Nous ne la donnerons pas. □

Exo: Soit I un groupoide et $F : I \longrightarrow Gpd$ le foncteur constant de valeur un groupoide fixé $A \in Gpd$. Determiner les groupoides $\underline{Hom}(*, F)$ et $\underline{Hom}^{lax}(*, F)$ des morphismes stricts et faibles du I-diagrammes constant égal à un point vers F. En déduire que le foncteur naturel

$$\underline{Hom}(I, Gpd) \longrightarrow Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$$

n'est pas surjectif sur les morphismes (i.e. qu'il existe des morphismes faibles non-isomorphes à des morphismes stricts).

On termine ce paragraphe par le fait important suivant.

Proposition 2.5 *Un morphisme faible $F \longrightarrow G$ de I-diagrammes de groupoides représente un isomorphisme dans $Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$ si et seulement pour tout $i \in I$ le foncteur*

$$f_i : F(i) \longrightarrow G(i)$$

est une équivalence de groupoides.

Preuve: On choisit pour tout $i \in I$ un foncteur inverse $g_i : G(i) \longrightarrow F(i)$, et des isomorphismes naturels

$$\alpha_i : f_i \circ g_i \Rightarrow Id \qquad \beta_i : g_i \circ f_i \Rightarrow Id.$$

On montre alors qu'il existe une unique structure de morphisme faible sur les g_i (i.e. des γ_g) et des uniques isomorphismes de morphismes faibles

$$\alpha : f \circ g \simeq Id \qquad \beta : g \circ f \simeq Id$$

compatibles avec celles déjà choisies pour tout i. (Exo: faire les détails). □

3 Limites homotopiques

Soit I une catégorie et notons $Gpd \longrightarrow \underline{Hom}(I, Gpd)$ le foncteur qui envoie un groupoide A sur le I-diagramme constant de valeur A. Il induit un foncteur sur les localisations

$$c : Ho(Gpd) \longrightarrow Ho(\underline{Hom}(I, Gpd)).$$

L'énoncé suivant est un corollaire du théorème 1.2.

Corollaire 3.1 *Le foncteur précédent $c : Ho(Gpd) \longrightarrow Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$ possède un adjoint à droite*

$$Holim_I : Ho(\underline{Hom}(I, Gpd)) \longrightarrow Ho(Gpd).$$

Preuve: Pour $F \in Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$ on pose

$$Holim_I F = \underline{Hom}^{lax}(c(*), F),$$

où $*$ est le groupoide réduit à un point et $\underline{Hom}^{lax}(c(*), F)$ est le groupoide des morphismes faibles de $c(*)$ vers F.

En clair, un objet x de $Holim_I F$ est la donnée suivante:

1. Pour tout objet $i \in I$ un objet $x_i \in F(i)$.
2. Pour tout morphisme $u : i \to j$ dans I, un isomorphisme $\gamma_u^x : u_*^F(x_i) \to x_j$. On suppose que $\gamma_{id}^x = id$.

On demande de plus que pour deux morphismes $i \xrightarrow{u} j \xrightarrow{v} k$ dans I, on ait

$$\gamma_v^x \circ v_*^F(\gamma_u^x) = \gamma_{v \circ u}^x$$

(en tant que morphismes $(v \circ u)_*^F(x_i) \to x_k$). Les morphismes entre x et y dans $Holim_I F$ sont simplement les familles de morphismes $\phi_i : x_i \longrightarrow y_i$ dans $F(i)$, telles que $\phi_j \circ \gamma_u^x = \gamma_u^y \circ u_*^F(\phi_i)$. On vérifie que le groupoide des foncteurs $\underline{Hom}(A, Holim_I F)$ est en bijection avec le groupoide $\underline{Hom}^{lax}(c(A), F)$, et ce de façon fonctorielle en $A \in Gpd$. En passant aux classes d'isomorphismes d'objets on trouve une bijection fonctorielle en $A \in Ho(Gpd)$

$$[A, Holim_I F] \simeq [c(A), F].$$

Ceci finit la preuve du corollaire. $\square$

Définition 3.2 *Notons I la catégorie de la forme*

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Soit $F \in Ho(\underline{Hom}(I, Gpd))$, représenté par un diagramme de groupoides

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[d, "p"] \\ A_2 \arrow[r, "q"'] & A_0. \end{tikzcd}$$

L'objet $Holim_I F$ est appelé le produit fibré homotopique de A_1 et A_2 au-dessus de A_0. *Il est noté*

$$Holim_I F =: A_1 \times^h_{A_0} A_2 \in Ho(Gpd).$$

Exo: Montrer que le groupoide $A_1 \times^h_{A_0} A_2$ est naturellement équivalent au groupoide dont les objets sont les triplets (a_1, a_2, u), avec $a_i \in A_i$ et $u : p(q_1) \to q(a_2)$ un isomorphisme dans A_0, et les morphismes sont les couples de morphismes $a_1 \to a'_1$, $a_2 \to a'_2$ qui commutent avec u et u'.

Exo: Soit H un groupe et BH son groupoide classifiant. Soit $* \longrightarrow BH$ l'unique foncteur. Calculer le groupoide $* \times^h_{BH} *$.

Le corollaire 3.1 possède aussi la généralisation suivante. On considère deux catégories I et J, et le foncteur

$$c_J : \underline{Hom}(J, Gpd) \longrightarrow \underline{Hom}(I \times J, Gpd)$$

qui à J-diagramme de groupoides fait correspondre le $I \times J$-diagramme "constant suivant I".

Corollaire 3.3 *Le foncteur précédent $c_J : Ho(\underline{Hom}(J, Gpd)) \longrightarrow Ho(\underline{Hom}(I \times J, Gpd))$ possède un adjoint à droite*

$$Holim_I : Ho(\underline{Hom}(I \times J, Gpd)) \longrightarrow Ho(\underline{Hom}(J, Gpd)).$$

Preuve: Soit $F \in Ho(\underline{Hom}(I \times J, Gpd))$. Pour tout $j \in J$, on considère le groupoide $\underline{Hom}^{lax}(c(*), F(-, j))$. Lorsque j parcourt la catégorie J, ceci définit un J-diagramme de groupoides que l'on note $Holim_I F$. On vérifie alors, à l'aide du théorème 1.2 que cet objet $Holim_I F$ possède la propriété universelle requise

$$[c_J(G), F] \simeq [G, Holim_I F].$$

$\square$

Remarquer que les objets de $\underline{Hom}(I \times J, Gpd)$ sont les I-diagrammes dans la catégorie des J-diagrammes. Lorsque I est la catégorie

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

un objet de $\underline{Hom}(I \times J, Gpd)$ est la donné d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[d] \\ F_2 \arrow[r] & F_0, \end{tikzcd}$$

dans $\underline{Hom}(J, Gpd)$. L'objet $Holim_I F$ est alors noté $F_1 \times^h_{F_0} F_2 \in Ho(\underline{Hom}(J, Gpd))$.

Définition 3.4 *Pour un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[d] \\ F_2 \arrow[r] & F_0, \end{tikzcd}$$

dans $\underline{Hom}(J, Gpd)$, l'objet $F_1 \times^h_{F_0} F_2 \in Ho(\underline{Hom}(J, Gpd))$ est appelé le produit fibré homotopique de F_1 avec F_2 au-dessus de F_0*.*

On remarque, d'après la preuve du corollaire 3.3 que le J-diagramme $F_1 \times^h_{F_0} F_2$ se décrit explicitement de la façon suivante

$$\begin{array}{cccc} F_1 \times^h_{F_0} F_2 : & J & \longrightarrow & Gpd \\ & j & \mapsto & F_1(j) \times^h_{F_0(j)} F_2(j). \end{array}$$

4 Les catégories homotopiques des préchamps et des champs

Soit maintenant C un site de Grothendieck.

Définition 4.1 *La* catégorie homotopique des préchamps sur C *est $Ho(\underline{Hom}(C^{op}, Gpd))$. Elle sera notée*

$$Ho(PrCh(C)) := Ho(\underline{Hom}(C^{op}, Gpd)).$$

La catégorie des préchamps $Ho(PrCh(C))$ est une généralisation de la catégorie des préfaisceaux en le sens suivant: il existe un foncteur $\underline{Hom}(C^{op}, Ens) \longrightarrow \underline{Hom}(C^{op}, Gpd)$, obtenu par composition avec le foncteur $Ens \longrightarrow Gpd$ qui envoie un ensemble sur le groupoide discret correspondant. Ceci induit un foncteur

$$i : Pr(C) \longrightarrow Ho(PrCh(C))$$

de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur C vers la catégorie homotopique des préchamps.

Proposition 4.2 *Le foncteur*

$$i : Pr(C) \longrightarrow Ho(PrCh(C))$$

est pleinement fidèle et possède un adjoint à gauche

$$\pi_0^{pr} : Ho(PrCh(C)) \longrightarrow Pr(C).$$

Preuve: On pose pour $F \in Ho(PrCh(C))$,

$$\pi_0^{pr}(F) : C^{op} \longrightarrow Ens$$

défini par $\pi_0^{pr}(F)(X) := \pi_0(F(X))$, où $\pi_0(F(X))$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans $F(X)$. Une utilisation du théorème permet de montrer que l'on a bien (Exo: le vérifier)

$$Hom(\pi_0^{pr}(F), G) \simeq [F, i(G)].$$

□

En composant le foncteur i de la proposition 4.2 et le plongement de Yoneda on trouve un foncteur pleinement fidèle (encore appelé plongement de Yoneda)

$$C \longrightarrow Ho(PrCh(C)),$$

par lequel on identifiera la catégorie C avec son image dans $Ho(PrCh(C))$. La version du lemme de Yoneda pour les préchamps et l'énoncé suivant.

Proposition 4.3 *Pour tout $F \in Ho(PrCh(C))$ et $X \in C$, il existe une bijection fonctorielle en F et X*

$$[X, F] \simeq \pi_0(F(X)) = \pi_0^{pr}(F)(X),$$

où $\pi_0(F(X))$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de $F(X)$.

Preuve: Il s'agit encore d'une application du théorème 1.2. On sait que $[X, F]$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans le groupoide $\underline{Hom}^{lax}(X, F)$ des morphismes faibles de X vers F. On commence par vérifier à l'aide du lemme de Yoneda usuel (appliqué au préfaisceau des objets et des morphismes de F) qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\underline{Hom}(X, F) \simeq F(X).$$

Il nous faut donc montrer que l'inclusion naturelle

$$j : \underline{Hom}(X, F) \longrightarrow \underline{Hom}^{lax}(X, F)$$

est une équivalence de groupoides. Pour cela, on commence par remarquer que le groupoide $\underline{Hom}^{lax}(X, F)$ se décrit de la façon suivante. Un objet de $\underline{Hom}^{lax}(X, F)$ est la donnée pour tout morphisme $u : Y \to X$ dans C d'un objet $x_u \in F(Y)$, et pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "v"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ & X, \end{tikzcd}$$

d'un isomorphisme $\gamma_f : x_v \to f^*(x_u)$ dans $F(Z)$, de sorte à ce que les γ_f vérifient aux conditions de cocycle usuelles: $g^*(\gamma_f)\gamma_g = \gamma_{f\circ g}$ et $\gamma_{id} = id$. On définit alors un foncteur

$$\phi : \underline{Hom}^{lax}(X, F) \longrightarrow \underline{Hom}(X, F)$$

qui à un objet de $\underline{Hom}^{lax}(X,F)$ associe $x_{id} \in F(X)$. On voit facilement que ϕ est un foncteur inverse de j (Exo: vérifier les détails). $\Box$

On cherche maintenant à généraliser la notion de faisceaux. Pour cela, notons que pour tout $F \in \underline{Hom}(C^{op}, Gpd)$, tout objet $X \in C$ et toute famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$, on dispose d'un diagramme de groupoides

$$F(X) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \underset{d_1}{\overset{d_0}{\underset{\longleftarrow s_0}{\rightrightarrows}}} \prod_{i,j} F(U_{i,j}) \;\overset{e_0,\,e_1,\,e_2}{\underset{t_0,\,t_1}{\Rrightarrow}}\; \prod_{i,j,k} F(U_{i,j,k})$$

où les morphismes sont définis de la façon suivante. Le morphisme s_0 est donné par la projection de $\prod_{i,j} F(U_{i,j})$ sur le facteur $\prod_i F(U_{i,i})$. Le morphisme d_0 a pour composante (i_0, j_0) la projection $\prod_i F(U_i) \longrightarrow F(U_{i_0})$ suivit de la restriction $F(U_{i_0}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0})$. De même, le morphisme d_1 a pour composante (i_0, j_0) la projection $\prod_i F(U_i) \longrightarrow F(U_{j_0})$ suivit de la restriction $F(U_{j_0}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0})$. Le morphisme t_0 est donné par la projection de $\prod_{i,j,k} F(U_{i,j,k})$ sur $\prod_{i,j} F(U_{i,j,j}) = \prod_{i,j} F(U_{i,j})$, et t_1 par celle sur $\prod_{i,j} F(U_{i,i,j}) = \prod_{i,j} F(U_{i,j})$. Finalement, le morphisme e_0 a pour composante (i_0, j_0, k_0) la projection $\prod_{i,j} F(U_{i,j}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0})$ suivie de la restriction $F(U_{i_0,j_0}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0,k_0})$. Le morphisme e_1 a pour composante (i_0, j_0, k_0) la projection $\prod_{i,j} F(U_{i,j}) \longrightarrow F(U_{i_0,k_0})$ suivie de la restriction $F(U_{i_0,k_0}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0,k_0})$. Et le morphisme e_2 a pour composante (i_0, j_0, k_0) la projection $\prod_{i,j} F(U_{i,j}) \longrightarrow F(U_{j_0,k_0})$ suivie de la restriction $F(U_{j_0,k_0}) \longrightarrow F(U_{i_0,j_0,k_0})$.

Définition 4.4 1. *Un préchamp $F \in Ho(PrCh(C))$ est un* champ *si pour tout $X \in C$ et toute famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$, le morphisme naturel*

$$F(X) \longrightarrow Holim\Big(\prod_i F(U_i) \rightleftarrows \prod_{i,j} F(U_{i,j}) \Rrightarrow \prod_{i,j,k} F(U_{i,j,k}) \Big)$$

est un isomorphisme dans $Ho(Gpd)$.

2. *La sous-catégorie pleine de $Ho(PrCh(C))$ formée des champs est notée $Ho(Ch(C))$.*

On termine par une version décanulée de la définition précédente.

Proposition 4.5 *Un préchamp $F \in Ho(PrCh(C))$ est un champ si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes:*

1. *Pour tout $X \in C$, et toute paire d'objets (a, b) dans $F(X)$, le préfaisceau*

$$\begin{array}{cccc} \underline{Iso}(a,b): & (C/X)^{op} & \longrightarrow & Ens \\ & (u : Y \to X) & \mapsto & Hom_{F(Y)}(u^*(a), u^*(b)) \end{array}$$

est un faisceau sur le site C/X.

2. *Pour tout $X \in C$, toute famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$, toute famille d'objets $a_i \in F(U_i)$, et toute famille d'isomorphismes dans $F(U_{i,j})$*

$$\phi_{i,j} : (a_i)_{|U_{i,j}} \simeq (a_j)_{|U_{i,j}}$$

vérifiant

$$(\phi_{j,k})_{|U_{i,j,k}} \circ (\phi_{i,j})_{|U_{i,j,k}} = (\phi_{i,k})_{|U_{i,j,k}} \qquad (\phi_{i,i})_{|U_i} = id$$

il existe un objet $a \in F(X)$, et des isomorphismes $\alpha_i : a_{|U_i} \simeq a_i$ tels que

$$\phi_{i,j} = (\alpha_j)_{|U_{i,j}} \circ (\alpha_i)^{-1}_{|U_{i,j}}.$$

Idée de preuve: On commence par décrire la limite homotopique intervenant dans la définition 4.4 en utilisant la formule

$$Holim_I F \simeq \underline{Hom}^{lax}(*, F),$$

pour tout I-diagramme de groupoides F. On remarque alors que la condition (1) de la proposition est équivalente au fait que le foncteur

$$F(X) \longrightarrow Holim\left(\prod_i F(U_i) \rightleftarrows \prod_{i,j} F(U_{i,j}) \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \prod_{i,j,k} F(U_{i,j,k}) \right)$$

soit pleinement fidèle. De même, la condition (2) de la proposition est équivalente au fait que ce foncteur soit pleinement fidèle. $\square$

Remarques:

1. En pratique c'est le critère donné par la proposition 4.5 que l'on utilise pour montrer qu'un préchamp est un champ. Dans la littérature ce critère est d'ailleurs souvent pris comme la définition de champ.

2. Une donnée $\{a_i \in F(U_i), \phi_{i,j}\}$ comme dans la proposition 4.5 est appelé une *donnée de descente* pour F et relativement au recouvrement $\{U_i \longrightarrow X\}$. La condition (2) de la propositon 4.5 se dit aussi "toute donnée de descente pour F est effective".

3. Dans la condition (2), $(\phi_{i,i})_{|U_i}$ est la restriction de $\phi_{i,i}$ à la diagonale

$$U_i \longrightarrow U_{i,i} = U_i \times_X U_i.$$