Cours 6: Champs II

1 Exemples de champs

Dans cette section on donne des exemples fondamentaux de champs, ainsi que deux procédés de constructions généraux. De nombreux exemples de champs peuvent être construits en utilisant ces exemples de bases et ces deux procédés.

Le champ des faisceaux: On considère C un site de Grothendieck. Pour tout $X \in C$, on regarde $Fais(X)$ le groupoide des faisceaux sur le site C/X. Pour un morphisme $u : Y \to X$ dans C on dispose d'un foncteur de restriction

$$u^* : Fais(X) \longrightarrow Fais(Y)$$

induit par le foncteur naturel $C/Y \longrightarrow C/X$. On a clairement $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, et donc $X \mapsto Fais(X)$ définit un préchamp que l'on appelle naturellement le préchamp des faisceaux sur C.

Proposition 1.1 *Le préchamp $Fais$ est un champ.*

Preuve: On utilise le critère donné par la proposition 4.5 du cours 5. Soit $X \in C$, et F et G deux objets de $Fais(X)$, c'est à dire deux faisceaux sur C/X. Le préfaisceau $Isom(F, G)$ est le préfaisceau des isomorphismes de F vers G, qui à $(u : Y \to X)$ fait correspondre l'ensemble des isomorphismes entre $u^*(F)$ et $u^*(G)$ en tant que faisceaux sur C/Y. Le fait que $Isom(F, G)$ soit un faisceau provient alors du lemme suivant.

Lemme 1.2 *Soit C un site de Grothendieck et F et G deux faisceaux sur C. Alors, le préfaisceau $\underline{Hom}(F, G)$ des morphismes de F vers G est un faisceau. De plus, le sous-préfaisceau $Isom(F, G) \subset \underline{Hom}(F, G)$ formé des isomorphismes est un sous-faisceau.*

Preuve du lemme: Le fait que $\underline{Hom}(F, G)$ soit un faisceau est bien connu. Il nous reste juste à montrer que $Isom(F, G) \subset \underline{Hom}(F, G)$ est un sous-faisceau. Mais cela se déduit aisément du fait qu'*être un isomorphisme* est une condition locale (Exo: faire les détails). $\square$

Soit maintenant $X \in C$ et $\{U_i \longrightarrow X\}$ une famille couvrante. Soient F_i des faisceaux sur C/U_i, et

$$\phi_{i,j} : (F_i)_{|U_{i,j}} \simeq (F_j)_{|U_{i,j}}$$

des isomorphismes qui vérifient

$$(\phi_{i,i})_{|U_i} = Id \qquad (\phi_{j,k})_{|U_{i,j,k}} \circ (\phi_{i,j})_{|U_{i,j,k}} = (\phi_{i,k})_{|U_{i,j,k}}.$$

On définit un faisceau F sur C/X de la façon suivante. Soit $Y \to X$ un objet de C/X. On pose $Y_i := Y \times_X U_i$ et $Y_{i,j} := Y \times_X U_{i,j}$. Les morphismes naturels $Y_i \to U_i$ et $Y_{i,j} \to U_{i,j}$ déterminent des objets de C/U_i et de $C/U_{i,j}$. Par définition, l'ensemble $F(Y)$ est l'ensemble des familles $\{a_i \in F_i(Y_i)\}$ qui vérifient

$$\phi_{i,j}((a_i)_{|Y_{i,j}}) = (a_j)_{|Y_{i,j}} \qquad \forall\, i, j.$$

Pour un morphisme $Z \xrightarrow{f} Y \longrightarrow X$ dans C/X, on définit une application

$$f^* : F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

par la formule $f^*(a)_i := f_i^*(a_i)$ où

$$f_i : Z_i = Z \times_X U_i \longrightarrow Y_i = Y \times_X U_i$$

est le morphisme induit par f. On vérifie facilement que $Y \mapsto F(Y)$ définit un préfaisceau sur C/X.

Soit $Y \to U_i$ un objet de C/U_i. L'ensemble $F(Y)$ est par définition l'ensemble des familles d'éléments $\{a_j \in F_j(Y \times_{U_i} U_{i,j})\}$ qui vérifient

$$\phi_{j,k}((a_j)_{|Y \times_{U_i} U_{i,j,k}}) = (a_k)_{|Y \times_{U_i} U_{i,j,k}} \qquad \forall\, j, k.$$

On définit une application $f_{i,Y}$ de $F(Y)$ vers $F_i(Y)$ en posant

$$f_{i,Y}(a) := (a_i)_{|Y} \in F_i(Y),$$

où on utilise le morphisme naturel $Y \to Y_i = Y \times_X U_i$ pour restreindre a_i sur Y. On définit une application en sens inverse $g_{i,Y}$ de $F_i(Y)$ vers $F(Y)$ en posant

$$g_{i,Y}(a)_j := \phi_{i,j}(a_{|Y \times_{U_i} U_{i,j}}) \in F_j(Y \times_{U_i} U_{i,j}).$$

L'élément $g_{i,Y}(a)$ est bien défini grace à la condition $\phi_{i,k} = \phi_{j,k} \circ \phi_{i,j}$ vérifiée sur $C/U_{i,j,k}$. Comme $(\phi_{i,i})_{|U_i} = id$, on voit que $f_{i,Y} \circ g_{i,Y} = id$. Inversement, pour $a \in F(Y)$, on a

$$g_{i,Y}(f_{i,Y}(a))_j = \phi_{i,j}((a_i)_{|Y \times_{U_i} U_{i,j}}) = a_j.$$

Ainsi, on a $g_{i,Y} \circ f_{i,Y} = id$.

Lorsque Y varie dans la catégorie C/U_i, les applications $g_{i,Y}$ et $f_{i,Y}$ définissent donc des isomorphimses inverses l'un de l'autre entre $F_{|U_i}$ et F_i. On considère l'isomorphisme

$$f_i : F_{|U_i} \simeq F_i$$

de préfaisceaux sur C/U_i ainsi défini. Soit maintenant deux indices i et j, et $Y \to U_{i,j}$ un objet de $C/U_{i,j}$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "f_{i,Y}"] \arrow[d, "f_{j,Y}"'] & F_i(Y) \arrow[dl, "\phi_{i,j}"] \\ F_j(Y). & \end{tikzcd}$$

Par définition on

$$\phi_{i,j}(f_{i,Y}(a)) = \phi_{i,j}((a_i)_{|Y}) = a_j.$$

Ceci montre presque la condition (2) de la proposition 4.5 du cours 5, à ceci près que F doit aussi être un faisceau. Mais ceci se déduit immédiatement du lemme suivant.

Lemme 1.3 *Le préfaisceau F ainsi défini est un faisceau.*

Preuve du lemme: Notons $p_i : C/U_i \longrightarrow C/X$ le foncteur naturel. Il induit par image directe un foncteur sur les catégories de faisceaux

$$(p_i)_* : Sh(C/U_i) \longrightarrow Sh(C/X)$$

par la formule

$$(p_i)_*(F')(Y \to X) = F'(Y \times_X U_i \to U_i).$$

De même, on dispose d'un foncteur image directe

$$(p_{i,j})_* : Sh(C/U_{i,j}) \longrightarrow Sh(C/X).$$

Par construction, on voit que F est le préfaisceau égaliseur des deux morphismes

$$\prod_i (p_i)_*(F_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} (p_{i,j})_*((F_i)_{|U_{i,j}})$$

où le premier morphisme a pour composante (i, j) la projection sur $(p_i)_*(F_i)$ suivit du morphisme de restriction $(p_i)_*(F_i) \longrightarrow (p_{i,j})_*((F_i)_{|U_{i,j}})$ (induit par le morphisme $U_{i,j} \to U_i$). Le second morphisme a pour composante (i, j) la projection sur $(p_j)_*(F_j)$ suivit de la restriction $(p_j)_*(F_j) \longrightarrow (p_{i,j})_*((F_j)_{|U_{i,j}})$ puis de l'isomorphisme

$$(p_{i,j})_*(\phi_{j,i}) : (p_{i,j})_*((F_j)_{|U_{i,j}}) \longrightarrow (p_{i,j})_*((F_i)_{|U_{i,j}}).$$

Or, tous les préfaisceaux $(p_i)_*(F_i)$ et $(p_{i,j})_*((F_i)_{|U_{i,j}})$ sont des images directes de faisceaux et donc eux même des faisceaux. Ainsi, F est une limite de faisceaux et donc est un faisceau. $\square$

Le lemme précédent montre que F est un faisceau (car on a vu que $F_{|U_i}$ est isomorphe à F_i), et donc définit un élément de $Fais(X)$ qui vérifie la condition (2) de la proposition 4.5 du cours 5. $\square$

Le champ des espaces algébriques: Soit Aff la catégorie des schémas affines, que l'on regarde comme un site de Grothendieck muni de la topologie étale. Pour $X \in Aff$, on considère $EspAlg(X)$ le sous-groupoide plein de $Fais(X)$ formé des espaces algébriques. La correspondance $X \mapsto EspAlg(X)$ est un sous-préchamp du champ des faisceaux $Fais(X)$.

Proposition 1.4 *Soit C un site de Grothendieck et F un champ sur C. Soit $F_0 \subset F$ un sous-préchamp plein de F (i.e. un sous-préfaisceau en groupoides tel que $F_0(X)$ soit plein dans $F(X)$). On suppose que la propriété suivante est satisfaite (on dit alors qu'*être dans F_0 est local*): si x est un objet de $F(X)$ tel qu'il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$ avec $x_{|U_i}$ isomorphe à un objet de $F_0(U_i)$ pour tout i, alors $x \in F(X)$. Alors F_0 est un champ.*

Preuve: C'est une application facile de la proposition 4.5 du cours 5. $\square$

La proposition précédente appliquée à $EspAlg \subset Fais$, et la proposition 1.2 du cours 4 impliquent que le préchamp $EspAlg$ est un champ.

Corollaire 1.5 *Le préchamp $EspAlg$ est un champ.*

On remarquera que le sous-préchamp plein $Sch \subset EspAlg$, des schémas, ne vérifie pas la condition de la proposition 1.4. On peut en fait montrer que Sch n'est pas un champ pour la topologie étale (i.e. qu'il existe des données de descente dans Sch qui ne sont pas effectives dans Sch, bien qu'elles soient effectives dans $EspAlg$).

Le champs des modules quasi-cohérents:

On se place maintenant dans le cas où $C = Aff$ est le site des schémas affines muni de la topologie étale. On souhaite définir un champ qui à un schéma affine $Spec\,A$ associe le groupoide $A - Mod$ des A-modules. Pour un morphisme de schémas affines $f : Spec\,B \longrightarrow Spec\,A$, correspondant à un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, on voudrait poser

$$f^* := B \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow B - Mod.$$

Cependant, avec ces définitions, pour deux morphismes $Spec\,C \xrightarrow{g} Spec\,B \xrightarrow{f} Spec\,A$, les deux foncteurs $(f \circ g)^*$ et $g^* \circ f^*$ ne sont que naturellement isomorphes mais pas égaux. En effet, pour un A-module M, le C-module $M \otimes_A C$ n'est que naturellement isomorphe à $(M \otimes_A B) \otimes_B C$ mais pas égal. Ainsi, $A \mapsto A - Mod$ *n'est pas* un préfaisceau en groupoides.

Il existe deux solutions pour résoudre ce problème. On peut généraliser la notion de préfaisceau en groupoides en une notion de préfaisceau faible en groupoides pour lesquels on se donne des isomorphismes $\gamma_{f,g} : (f \circ g)^* \simeq g^* \circ f^*$ vérifiant une certaine condition de cocycle (analogue de la définition des morphismes faibles entre préchamps). C'est ce point de vue qui est souvent considéré dans la littérature (voir par exemple [La-Mo] et [SGA1]). Une seconde solution consiste à modifier le groupoide des A-modules en un groupoide qui lui est équivalent mais qui sera fonctoriel en A (un théorème général, dit de strictification, dit que cela est toujours possible). C'est ce second point de vue que nous adopterons.

Pour un anneau commutatif A on définit donc un groupoide $\underline{A} - Mod$ de la façon suivante. Un objet M consiste en les données suivantes:

- Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $u : A \longrightarrow B$, un B-module $M_u \in B - Mod$.
- Pour tout diagramme commutatif d'anneaux commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[dl, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

  un isomorphisme de C-modules

$$\gamma_f^M : M_u \otimes_B C \longrightarrow M_v$$

  (simplement notés γ_f lorsque M est clair).

On demande de plus que ces données satisfassent les deux conditions suivantes:

- $$\gamma_{id} = id$$

- Pour tout diagramme commutatif d'anneaux commutatifs

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "u"] & \\
D & C \arrow[l, "g"] & B \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(M_u \otimes_B C) \otimes_C D \arrow[r, "\gamma_f \otimes_C D"] \arrow[d, "\alpha"'] & M_v \otimes_C D \arrow[d, "\gamma_g"] \\
M_u \otimes_B D \arrow[r, "\gamma_{g \circ f}"'] & M_w,
\end{tikzcd}$$

où $\alpha : (M_u \otimes_B C) \otimes_C D \simeq M_u \otimes_B D$ est l'isomorphisme naturel de simplification des produits tensoriels (qui envoie $(m \otimes c \otimes d)$ sur $(m \otimes g(c).d)$).

Un morphisme $\phi : M \to N$ dans le groupoide $\underline{A} - Mod$ consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$\phi_u : M_u \longrightarrow N_u$$

pour tout $u : A \longrightarrow B$, tel que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[dl, "f"] \\
C &
\end{tikzcd}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
M_u \otimes_B C \arrow[r, "\phi_u \otimes_B C"] \arrow[d, "\gamma_f"'] & N_u \otimes_C D \arrow[d, "\gamma_f"] \\
M_v \arrow[r, "\phi_f"'] & N_v.
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. On définit un foncteur

$$f^* : \underline{A} - Mod \longrightarrow \underline{B} - Mod$$

de la manière suivante. Pour un objet M, et $u : B \to B'$ on pose

$$f^*(M)_u := M_{u \circ f}.$$

De même, pour un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B' \arrow[dl, "g"] \\ B'' & \end{tikzcd}$$

on pose

$$\gamma_g^{f^*(M)} = \gamma_g^M : f^*(M_u) \otimes_{B'} B'' = M_{u\circ f} \otimes_{B'} B'' \longrightarrow f^*(M)_v = M_{v\circ f}.$$

Ainsi défini, $A \mapsto \underline{A} - Mod$ définit un préfaisceau en groupoides

$$\underline{Mod} : Aff^{op} \longrightarrow Gpd$$

et donc un préchamp sur Aff. Ce préchamp est appelé le *préchamp des modules* ou encore le *préchamp des modules quasi-cohérents.*

Lemme 1.6 *Le foncteur*

$$\underline{A} - Mod \longrightarrow A - Mod$$

qui à un $\underline{A}$-module M associe le A-module M_{id}, est une équivalence de groupoides.

Preuve: On construit un foncteur en sens inverse de la façon suivante. Soit M un A-module. On définit un $\underline{A}$-module $\underline{M}$ en posant

$$\underline{M}_u := B \otimes_A M$$

pour tout morphisme $u : A \longrightarrow B$. Pour un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[dl, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

on prend pour

$$\gamma_f : C \otimes_B \underline{M}_u = C \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq C \otimes_A M = \underline{M}_v$$

l'isomorphisme naturel de simplification des produits tensoriels (qui envoie un élément de la forme $c \otimes (b \otimes m)$ sur l'élément $(c.f(b) \otimes m)$).

Pour un A-module M on a un isomorphisme fonctoriel en M

$$\underline{M}_{id} = A \otimes_A M \simeq M.$$

De même, on montre qu'il existe un isomorphise naturel de $\underline{A}$-modules

$$\underline{M_{id}} \simeq M$$

pour tout $\underline{A}$-module M. Ceci montre que les foncteurs précédents sont inverse l'un de l'autre.
□

Proposition 1.7 *Le préchamp $\underline{Mod}$ est un champ.*

Preuve: On vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.5 du cours 5.

Pour vérifier la condition (1) on commence par utiliser le lemme 1.6. Il permet en effet de montrer que cette condition est équivalente à la suivante: étant donnée un anneau commutatif A et deux A-modules M et N, le préfaisceau

$$\begin{array}{cccc} \underline{Iso}(M,N): & Aff^{op}/Spec\,A & \longrightarrow & Ens \\ & (A \to B) & \mapsto & Iso(M \otimes_A B, N \otimes_A B) \end{array}$$

est un faisceau (ici $Iso(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$ est l'ensemble des isomorphismes de B-modules). Comme souvent, on montre que $\underline{Iso}(M,N)$ est un sous-faisceau du faisceau des morphismes

$$\begin{array}{cccc} \underline{Hom}(M,N): & Aff^{op}/Spec\,A & \longrightarrow & Ens \\ & (A \to B) & \mapsto & Hom(M \otimes_A B, N \otimes_A B). \end{array}$$

Pour voir que $\underline{Hom}(M,N)$ est un faisceau on écrit M comme le conoyau d'un morphisme de A-modules libres

$$A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)} \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

où I et J sont des ensembles arbitraires et $A^{(I)}$ et $A^{(J)}$ les A-modules libres associés. On en déduit que le préfaisceau $\underline{Hom}(M,N)$ (qui au passage est un préfaisceau en groupes abéliens) est le noyau d'un morphisme

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(M,N) \longrightarrow \widetilde{N}^J \longrightarrow \widetilde{N}^J,$$

où $\widetilde{N}$ est le préfaisceau qui envoie $(A \to B)$ sur le groupe abélien sous-jacent au B-module $B \otimes_A N$. Ainsi, comme les faisceaux forment une sous-catégorie des préfaisceaux stables par limites il nous suffit de montrer que $\widetilde{N}$ est un faisceau. Ceci se déduit du lemme suivant.

Lemme 1.8 *Pour tout anneau commutatif A, toute famille couvrante fpqc $\{A \longrightarrow A_i\}$, et tout A-module N, le diagramme*

$$N \longrightarrow \prod_i (N \otimes_A A_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} (N \otimes_A A_{i,j})$$

indentifie N á l'égaliseur des deux morphismes

$$\prod_i (N \otimes_A A_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} (N \otimes_A A_{i,j}).$$

Preuve du lemme: Nous avons déjà vu ce lemme dans le cas où $N = A$ (voir le lemme 2.8 du cours 3). La preuve du cas général est la même. $\square$

Montrons maintenant que la condition (2) de la proposition 4.5 du cours 5 est vérifiée. Pour cela on utilise encore une fois le lemme 1.6 afin de traduire cette seconde condition en la condition suivante:

Soit A un anneau commutatif et $\{A \longrightarrow A_i\}$ une famille couvrante étale. Pour toute famille de A_i-modules M_i, et isomorphismes de $A_{i,j}$-modules

$$\phi_{i,j} : M_i \otimes_{A_i} A_{i,j} \simeq M_j \otimes_{A_j} A_{i,j}$$

tel que

$$(\phi_{i,i}) \otimes_{A_{i,i}} A_i = id_{M_i} \qquad (\phi_{j,k} \otimes_{A_{j,k}} A_{i,j,k}) \circ (\phi_{i,j} \otimes_{A_{i,j}} A_{i,j,k}) = \phi_{i,k} \otimes_{A_{i,k}} A_{i,j,k}$$

il existe un A-module M et des isomorphismes de A_i-modules

$$\alpha_i : M \otimes_A A_i \simeq M_i$$

tel que

$$\phi_{i,j} = (\alpha_j \otimes_{A_j} A_{i,j}) \circ (\alpha_i \otimes_{A_i} A_{i,j})^{-1}.$$

Soit M_i et $\phi_{i,j}$ une telle donnée. On considère alors le A-module M défini par

$$M := lim \left(\prod_i M_i \rightrightarrows \prod_{i,j} M_i \otimes_{A_i} A_{i,j} \right),$$

où le premier morphisme a pour composante (i,j) la projection sur M_i suivi du morphisme naturel $M_i \longrightarrow M_i \otimes_{A_i} A_{i,j}$, et le second a pour composante (i,j) la projection sur M_j suivit du morphisme naturel $M_j \longrightarrow M_j \otimes_{A_j} A_{i,j}$ et de l'isomorphisme $\phi_{j,i}$. Comme chaque $A \longrightarrow A_i$ est plat, on a pour tout i fixé

$$A_i \otimes_A M \simeq lim \left(\prod_j A_i \otimes_A M_j \rightrightarrows \prod_{j,k} A_i \otimes_A M_j \otimes_{A_j} A_{j,k} \right).$$

On construit alors un morphisme

$$A_i \otimes_A M \longrightarrow M_i$$

en composant la projection naturelle

$$lim \left(\prod_j A_i \otimes_A M_j \rightrightarrows \prod_{j,k} A_i \otimes_A M_j \otimes_{A_j} A_{j,k} \right) \longrightarrow A_i \otimes_A M_i$$

avec le morphisme $A_i \otimes_A M_i \longrightarrow M_i$ qui envoie $(a \otimes m)$ sur $a.m$. De manière analogue à la preuve de la proposition 1.1, on montre que ce morphisme induit un isomorphisme de A_i-modules

$$\alpha_i : A_i \otimes_A M \longrightarrow M_i$$

qui est tel que

$$\phi_{i,j} = (\alpha_j \otimes_{A_j} A_{i,j}) \circ (\alpha_i \otimes_{A_i} A_{i,j})^{-1}.$$

$\square$

Deux critères généraux: On revient au cas d'un site de Grothendieck général C.

Proposition 1.9 *Soit*

$$\begin{tikzcd} & F_2 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r] & F_0 \end{tikzcd}$$

un diagramme de préfaisceaux en groupoides. Si tous les F_i sont des champs alors $F_1 \times^h_{F_0} F_2$ est un champ.

Preuve: On applique toujours la proposition 4.5 du cours 5. Notons

$$p : F_1 \longrightarrow F_0 \qquad q : F_2 \longrightarrow F_0$$

les deux morphismes. Alors, le préchamp $F_1 \times^h_{F_0} F_2$ est donné par le foncteur qui à $X \in C$ associe le groupoide $F_1(X) \times^h_{F_0(X)} F_2(X)$ dont les objets sont les triplets (x, y, u), avec x un objet de $F_1(X)$, y un objet de $F_2(X)$ et $u : p(x) \simeq q(y)$ un isomorphisme dans $F_0(X)$. Les morphismes entre (x, y, u) et (x', y', u') sont les couples de morphismes $f : x \to x'$, $g : y \to y'$ tel que $u' \circ p(f) = u \circ q(g)$.

Soit $X \in C$ et $a = (x, y, u)$ et $b = (x', y', u')$ deux objets de $F_1(X) \times^h_{F_0(X)} F_2(X)$. On a alors un isomorphisme de préfaisceaux sur C/X

$$\underline{Iso}(a, b) \simeq \underline{Iso}(x, x') \times_{\underline{Iso}(p(x),q(y'))} \underline{Iso}(y, y').$$

Ainsi, $\underline{Iso}(a, b)$ est un produit fibré de faisceaux et donc est un faisceau.

Soit maintenant $X \in C$ et $\{U_i \to X\}$ une famille couvrante. Soit $(x_i, y_i, u_i) \in (F_1 \times^h_{F_0} F_2)(U_i)$ et $\phi_{i,j} = (f_{i,j}, g_{i,j})$ une donnée de descente pour $F_1 \times^h_{F_0} F_2$. On voit que les $x_i \in F_1(U_i)$ et les $f_{i,j}$ définissent une donnée de descente pour F_1 et se recollent donc en un objet $x \in F_1(X)$ muni d'isomorphismes $\alpha_i : x_{|U_i} \simeq x_i$ avec $f_{i,j} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1}$ sur $U_{i,j}$. De même, les y_i et $g_{i,j}$ se recollent en un $y \in F_2(X)$ muni d'isomorphismes $\beta_i : y_{|U_i} \simeq y_i$ avec $g_{i,j} = \beta_j \circ \beta_i^{-1}$ sur $U_{i,j}$. Enfin, les morphismes locaux

$$v_i : q(\beta_i^{-1}) \circ u_i \circ q(\alpha_i) : p(x)_{|U_i} \longrightarrow q(y)_{|U_i}$$

se recollent en un isomorphisme $v : p(x) \simeq q(x)$. On voit alors que $(x, y, v) \in F_1(X) \times^h_{F_0(X)} F_2(X)$, et les isomorphismes

$$\gamma_i := (\alpha_i, \beta_i) : (x, y, v)_{|U_i} \simeq (x_i, y_i, u_i)$$

vérifient bien $\phi_{i,j} = \gamma_j \circ \gamma_i^{-1}$ sur $U_{i,j}$. □

Proposition 1.10 *Soit F et G deux champs sur C. On considère le préchamp $Map(F, G)$ défini par*

$$\begin{array}{rccc} Map(F,G): & C^{op} & \mapsto & Gpd \\ & X & \mapsto & \underline{Hom}^{lax}(F \times X, G). \end{array}$$

Alors $Map(F, G)$ est un champ que l'on appele le champ des morphismes de F dans G.

Preuve: Exercice. □

Références

[La-Mo] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, A series of Modern Surveys in Mathematics vol. **39**, Springer-Verlag 2000.

[SGA1] M. Artin, A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture notes in Math. **224**, Springer-Verlag 1971.