# Cours 7: Champs III

Pour tout ce cours on se fixe un site de Grothendieck arbitraire.

## 1 Equivalences locales et champs associés

On rappelle qu'on dispose d'un foncteur pleinement fidèle

$$Pr(C) \longrightarrow Ho(PrCh(C))$$

de la catégorie des préfaisceaux en ensembles sur $C$ vers la catégorie homotopique des préchamps (voir la proposition 4.2 du cours 5). Ce foncteur d'inclusion possède aussi un adjoint à gauche

$$\pi_0^{pr} : Ho(PrCh(C)) \longrightarrow Pr(C).$$

On rappelle aussi que pour un préchamp $F$, le préfaisceau $\pi_0^{pr}(F)$ envoie $X \in C$ sur l'ensemble $\pi_0(F(X))$ des classes d'isomorphismes d'objets de $F(X)$. Le lemme de Yoneda (voir la proposition 4.3 du cours 5) pour les préchamps implique donc qu'il existe des isomorphismes fonctoriels

$$\pi_0^{pr}(F)(X) \simeq [X, F].$$

**Proposition 1.1** *1. Un préfaisceau $F$, considéré comme un préchamp, est un champ si et seulement si c'est un faisceau.*

*2. Le foncteur d'inclusion*

$$Sh(C) \longrightarrow Ho(Ch(C))$$

*est pleinement fidèle et possède un adjoint à gauche noté*

$$\pi_0 : Ho(Ch(C)) \longrightarrow Ho(Sh(C)).$$

*Preuve:* (1) se déduit facilement de la proposition 4.5 du cours 5. On définit le foncteur $\pi_0$ comme étant le foncteur $\pi_0^{pr}$ composé avec le foncteur faisceau associé. $\square$

Par la suite, on identifiera toujours un préfaisceau au préchamp qu'il défini. De même, un faisceau sera identifié au champ qu'il défini.

**Définition 1.2** *Soit $F$ un préchamp, $X \in C$ et $s \in F(X)$ un objet. On définit un préfaisceau en groupes sur $C/X$ comme suit*

$$\begin{array}{cccc} \pi_1^{pr}(F,s) : & (C/X)^{op} & \longrightarrow & Gp \\ & (u : Y \to X) & \mapsto & Aut_{F(Y)}(u^*(s)). \end{array}$$

*Le faisceau associé à $\pi_1^{pr}(F,s)$ est noté*

$$\pi_1(F,s) := a(\pi_1^{pr}(F,s)).$$

On remarque immédiatement que le préfaisceau $\pi_1^{pr}(F,s)$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'isomorphisme de l'objet $s \in F(X)$ (Exo: montrer qu'un isomorphisme $\gamma : s \simeq s'$ induit un isomorphisme de préfaisceaux $\pi_1^{pr}(F,s) \simeq \pi_1^{pr}(F,s')$). Ainsi, à isomorphisme près, le faisceau $\pi_1(F,s)$ ne dépend que de $s \in \pi_0(F(X)) = [X,F]$.

On remarque aussi que la construction $(F,s) \mapsto \pi_1(F,s)$ est fonctorielle en le couple $(F,s)$. Plus précisèmment, si $f : F \longrightarrow G$ est un morphisme faible, on dispose d'un morphisme bien défini et fonctoriel en $f$

$$\pi_1(f,s) : \pi_1(F,s) \longrightarrow \pi_1(G,f(s)).$$

**Définition 1.3** *Un morphisme faible $f : F \longrightarrow G$ de préchamps est une* équivalence locale *s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

1. *Le morphisme induit $\pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(G)$ est un isomorphisme de faisceaux.*

2. *Pour tout $X \in C$, et tout objet $s \in F(X)$, le morphisme induit $\pi_1(F,s) \longrightarrow \pi_1(G,f(s))$ est un isomorphisme de faisceaux.*

Exo: vérifier que les équivalences locales sont stables par composition. Montrer aussi qui si $f$ et $g$ sont deux morphismes faibles isomorphes, alors $f$ est une équivalence locale si et seulement si $g$ l'est.

**Proposition 1.4** *Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme faible de champs. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme $f$ est une équivalence locale.*

2. *Pour tout $X \in C$, le morphisme induit*

$$f_X : F(X) \longrightarrow G(X)$$

   *est une équivalence de groupoides.*

3. *Le morphisme $f$ est un isomorphisme dans $Ho(Ch(C))$.*

*Preuve:* Montrons que (1) implique (2).

Commençons par montrer que $f_X$ est pleinement fidèle. Tout d'abord, comme $F$ et $G$ sont des champs, pour tout $s \in F(X)$ les préfaisceau $\pi_1^{pr}(F,s)$ et $\pi_1^{pr}(G,f(s))$ sont des faisceaux (voir la première condition de la proposition 4.5 du cours 5). Ainsi, par hypothèse sur $f$ le foncteur $f_X$ induit des isomorphismes $Aut_{F(X)}(s) \simeq Aut_{G(X)}(f(s))$. Comme $F(X)$ et $G(X)$ sont des groupoides ceci implique que

$$Iso_{F(X)}(s,t) \longrightarrow Iso_{G(X)}(f(s),f(t))$$

est une bijection dès que $Iso(s,t)$ est non vide (Exo: vérifier cette assertion). Ainsi, $f$ est pleinement fidèle si et seulement si

$$(Iso(f(s), f(t)) \neq \emptyset) \Rightarrow (Iso(s,t) \neq \emptyset)$$

pour tout $s, t \in F(X)$.

Soit donc $v : f(s) \simeq f(t)$ un isomorphisme dans $G(X)$ et montrons que $s$ et $t$ sont isomorphes dans $F(X)$. Comme $\pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(G)$ est un isomorphisme, il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$ et des isomorphismes $u_i : s_{|U_i} \simeq t_{|U_i}$ dans $F(U_i)$. D'après ce que l'on a vu plus haut on peut aussi choisir $u_i$ tel que $f(u_i) = v_{|U_i}$. Sur $U_{i,j}$ on a

$$f(u_i)_{|U_{i,j}} = v_{|U_{i,j}} = f(u_j)_{|U_{i,j}}.$$

D'après ce que l'on a vu plus haut cela implique que $(u_i)_{|U_{i,j}} = (u_j)_{|U_{i,j}}$. Comme $\underline{Iso}(s,t)$ est un faisceau (car $F$ est un champ), les isomorphismes locaux $u_i$ se recollent en un isomorphisme $u : s \simeq t$. Ceci termine de démontrer que $f_X$ est pleinement fidèle, et ce pour tout $X \in C$.

Soit maintenant $t \in G(X)$. Par hypothèse, il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$, des objets $s_i \in F(U_i)$ et des isomorphismes $u_i : f(s_i) \simeq t_{|U_i}$. Considèrons pour tout $i$ et $j$ l'isomorphisme

$$(u_j \circ u_i^{-1})_{|U_{i,j}} : f(s_i)_{|U_{i,j}} \simeq f(s_j)_{|U_{i,j}}.$$

Par pleine fidèlité de $f$ (par ce que l'on vient déjà de voir) il existe des isomorphismes

$$\phi_{i,j} : (s_i)_{|U_{i,j}} \simeq (s_j)_{|U_{i,j}}$$

dans $F(U_{i,j})$ tel que $f(\phi_{i,j}) = (u_j \circ u_i^{-1})_{|U_{i,j}}$. Toujours par pleine fidèlité de $f$, on voit que les $s_i$ et les $\phi_{i,j}$ définissent une donnée de descente pour $F$, et ainsi la proposition 4.5 du cours 5 implique l'existence de $s \in F(X)$ qui la recolle. Par construction, on voit que $f(s)_{|U_i}$ est naturellement isomorphe à $t_{|U_i}$, et que ces isomorphismes locaux se recollent en un isomorphisme entre $f(s)$ et $t$.

Enfin, (2) implique (3) par la proposition 2.5 du cours 5. Et (3) implique (1) par fonctorialité des constructions $F \mapsto \pi_0(F)$ et $(F, s) \mapsto \pi_1(F, s)$. $\Box$

**Définition 1.5** *Soit $F$ un préchamp. Un* champ associé *pour $F$ est la donnée d'un champ $a(F)$, et d'une équivalence locale $F \longrightarrow a(F)$.*

On cite sand démonstration le théorème important suivant.

**Théorème 1.6** *1. Pour tout préchamp $F$ un champ associé $F \to a(F)$ existe.*

*2. Si $F \to a(F)$ est un champ associé, alors pour tout champ $G$ le morphisme induit*

$$[a(F), G] \longrightarrow [F, G]$$

*est bijectif.*

*3. Pour tout diagramme de préchamps*

$$F_1 \longleftarrow F_0 \longrightarrow F_2$$

*il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(Ch(C))$*

$$a(F_1 \times^h_{F_0} F_2) \simeq a(F_1) \times^h_{a(F_0)} a(F_2).$$

On déduit de ce théorème le corollaire suivant.

**Corollaire 1.7** *Le foncteur d'inclusion*

$$Ho(Ch(C)) \longrightarrow Ho(PrCh(C))$$

*admet un adjoint à gauche*

$$a : Ho(PrCh(C)) \longrightarrow Ho(Ch(C))$$

*qui à $F$ associe son champ associé $a(F)$.*

On remarquer que le champ associé à un préfaisceau $F$ est simplement donné par son faisceau associé (comme cela se voit directement à partir de la définition 1.5). De plus, pour tout préchamp $F$, et $i : F \to a(F)$ son champ associé on a

$$\pi_1(F, s) \simeq \pi_1^{pr}(a(F), i(s)).$$

# 2 Champs quotients

Nous allons maintenant utiliser la notion de champ associé pour construire de nouveaux exemples de champs: les champs quotients.

On commence par considérer un faisceau de groupes $G$ sur $C$. On construit un préchamp $K(G,1)$ en posant

$$\begin{array}{cccc} K(G,1): & C^{op} & \longrightarrow & Gpd \\ & X & \mapsto & B(G(X)), \end{array}$$

où on rappelle que pour un groupe $H$, $B(H)$ est le groupoide possédant un unique objet noté $*$ et avec $Aut_{B(H)}(*) = H$. De manière équivalente, pour tout groupoide $A$, les foncteurs $B(H) \longrightarrow A$ sont en bijection avec les paires $(x, u)$, où $x$ est un objet de $A$ et $u : H \longrightarrow Aut_A(x)$ est un morphisme de groupes.

On se propose de décrire le champ associé à $K(G,1)$ que nous noterons $BG$ (ceci prète à confusion mais est une notation standard dans la littérature).

On rappelle qu'un $G$-torseur est un faisceau $E$ muni d'une action (à gauche) de $G$ (i.e. d'un morphisme $\mu : G \times E \longrightarrow E$ qui satisfait aux axiomes évidents) qui vérifie les deux conditions suivantes:

1. Pour tout objet $X \in C$, il existe un recouvrement $\{U_i \longrightarrow X\}$ tel que chaque $E(U_i)$ soit non vide (en d'autres termes le morphisme $E \to *$ est un épimorphisme de faisceaux).

2. Le morphisme

$$\mu \times id : G \times E \longrightarrow E \times E$$

est un isomorphisme.

Les $G$-torseurs sur $C$ forment une catégorie $G - Tors(C)$, pour laquelle les morphismes sont simplement les morphismes de faisceaux compatibles avec l'action de $G$. On note alors les deux faits suivants (Exo: les démontrer).

1. Pour tout $X \in C$ il existe un foncteur de restriction

$$G - Tors(C) \longrightarrow G_{|X} - Tors(C/X),$$

où $G_{|X}$ est le faisceau de groupes $G$ restreint au site $C/X$.

2. Si $E$ est un $E$-torseur, alors pour tout $X \in C$, il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$ tel que chaque faisceau retreint $E_{|U_i}$ soit isomorphe, comme $G_{|U_i}$-torseur, à $G_{|U_i}$ muni de son action par translation à gauche.

3. Soit $E$ est un $G$-faisceau tel que pour tout $X \in C$, il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$ tel que chaque faisceau retreint $E_{|U_i}$ soit isomorphe, comme $G_{|U_i}$-torseur, à $G_{|U_i}$ muni de son action par translation à gauche. Alors $E$ est un $G$-torseur.

4. Tout morphisme de $G$-torseurs est un isomorphisme.

5. Si $G$ est le $G$-torseur trivial (i.e. $G$ muni de son action par translation à gauche), alors pour tout $X \in C$ il existe un isomorphisme fonctoriel en $X$

$$G(X) \simeq Aut_{G_{|X}-Tors(C/X)}(G_{|X}).$$

On considère le préchamp des $G$-torseurs défini de la façon suivante.

$$\begin{array}{cccc} G - Tors : & C^{op} & \longrightarrow & Gpd \\ & X & \mapsto & G - Tors(X) := G_{|X} - Tors(C/X). \end{array}$$

Il existe un morphisme de préchamps

$$K(G,1) \longrightarrow G - Tors$$

qui sur $X \in C$ est donné par le torseur trivial $G_{|X}$ et l'isomorphisme naturel

$$G(X) \simeq Aut_{G_{|X}-Tors(C/X)}(G_{|X}).$$

**Théorème 2.1** *Le morphisme*

$$K(G,1) \longrightarrow G - Tors$$

*est un champ associé.*

*Preuve:* Il faut montrer d'une part que $G - Tors$ est un champ, et d'autre part que le morphisme $K(G,1) \longrightarrow G - Tors$ est une équivalence locale.

**Lemme 2.2** *Le préchamp $G - Tors$ est un champ.*

*Preuve du lemme:* On commence par montrer que la condition (1) de la proposition 4.5 du cours 5 est satisfaite. Soit $X \in C$ et $E$ et $F$ deux objets de $G - Tors(X)$, c'est à dire deux $G_X$-torseurs sur $C/X$. Le faisceau $\underline{Iso}_G(E, F)$, des isomorphismes de $G_X$-torseurs, s'identifie naturellement à l'égaliseur des deux morphismes

$$\underline{Iso}(E, F) \rightrightarrows \underline{Iso}(G \times E, F).$$

Le premier de ces morphismes envoie un isomorphisme de faisceaux $f : E \longrightarrow F$ sur le composé

$$G \times E \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{f} F,$$

et le second envoie $f$ sur le composé

$$G \times E \xrightarrow{id \times f} G \times F \xrightarrow{\mu} F.$$

Comme le préchamp des faisceaux est un champ on sait déjà que $\underline{Iso}(E, F)$ et $\underline{Iso}(G \times E, F)$ sont des faisceaux sur $C/X$. Ainsi, $\underline{Iso}_G(E, F)$ est une limite de faisceaux et est donc un faisceau.

On montre maintenant que la condition (2) de la proposition 4.5 du cours 5 est satisfaite. Pour cela soit $X \in C$ et $\{U_i \longrightarrow X\}$ une famille couvrante. On se donne une donnée de descente $E_i \in G - Tors(U_i)$, et $\phi_{i,j} : (E_i)_{|U_{i,j}} \simeq (E_j)_{|U_{i,j}}$ pour $G - Tors$. En oubliant l'action de $G$ sur les $E_i$ on trouve une donnée de descente pour le champ des faisceaux. Il existe donc un faisceau $E$ sur $C/X$, et des isomorphismes de faisceaux sur $C/U_i$

$$\alpha_i : E_{|U_i} \simeq E_i$$

tel que

$$\phi_{i,j} = (\alpha_j)_{|U_{i,j}} \circ (\alpha_i)^{-1}_{|U_{i,j}}.$$

On définit des morphismes

$$a_i : G_{|U_i} \times E_{|U_i} \longrightarrow E_{|U_i}$$

en demandant que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
G_{|U_i} \times E_{|U_i} \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "id \times \alpha_i"'] & E_{|U_i} \arrow[d, "\alpha_i"] \\
G_{|U_i} \times E_i \arrow[r, "\mu_i"] & E_i,
\end{tikzcd}$$

où les $\mu_i$ sont les morphismes d'action de $G$. On remarque alors que les $a_i$ se recollent en un unique morphisme de faisceaux sur $C/X$

$$a : G_{|X} \times E \longrightarrow E.$$

Ceci définit une structure de $G$-faisceau sur $E$ de sorte à ce que les isomorphismes $\alpha_i : E_{|U_i} \simeq E_i$ soit des isomorphismes de $G_{|U_i}$-faisceaux. Ainsi, $E$ est un $G_{|X}$-faisceau localement isomorphe à un $G$-torseur, et est donc lui aussi un $G_{|X}$-torseur. Il définit donc un objet $E \in G - Tors(X)$, qui avec les isomorphismes $\alpha_i$, recollent la donnée de descente. Ceci termine la preuve du lemme. $\square$

**Lemme 2.3** *Le morphisme naturel*

$$K(G,1) \longrightarrow G-Tors$$

*est une équivalence locale.*

*Preuve du lemme:* Pour tout $X \in C$ le morphisme

$$K(G,1)(X) \longrightarrow G-Tors(X)$$

identifie $K(G,1)(X)$ avec le sous-groupoide plein de $G-Tors(X)$ qui ne contient que le $G_{|X}$-torseur trivial $G_{|X}$. Ceci implique que le morphisme induit

$$\pi_1(K(G,1),*) = G_{|X} \longrightarrow \pi_1(G-Tors, G_{|X})$$

est un isomorphisme. De plus, comme tous les objets de $G-Tors(X)$ sont localement isomorphes entre eux (car ils sont tous localement isomorphes au torseur trivial), on a $\pi_0(G-Tors) \simeq *$. Ainsi, le morphisme induit

$$\pi_0(K(G,1)) = * \longrightarrow \pi_0(G-Tors) \simeq *$$

ne peut être qu'un isomorphisme. □

Le lemme 2.2 et le lemme 2.3 démontrent le théorème. □

On se propose maintenant de donner une généralisation du champ $BG$ pour laquelle on rajoute une action de $G$ sur un faisceau donné $E$ (le cas de $BG$ se retrouvera pour $E=*$).

On se fixe donc un faisceau $E$ muni d'une action de $G$. On définit un préchamp $K(G,E,1)$ de la façon suivante. Pour $X \in C$, l'ensemble des objets du groupoide $K(G,E,1)(X)$ est l'ensemble $E(X)$. Un morphisme de $x$ dans $y$ dans $K(G,E,1)(X)$ est la donnée d'un $g \in G(X)$ tel que $g.x = y$. La composition des morphismes est alors défini par multiplication dans $G(X)$. Pour $u : Y \longrightarrow X$ un morphisme dans $C$, on dispose d'un foncteur

$$u^* : K(G,E,1)(X) \longrightarrow K(G,E,1)(Y).$$

Ce foncteur vaut $u^* : E(X) \longrightarrow E(Y)$ sur les ensembles d'objets et est induit par $u^* : G(X) \longrightarrow G(Y)$ sur l'ensemble des morphismes.

**Définition 2.4** *Le champ associé à* $K(G,E,1)$ *est appelé le* champ quotient de $E$ par $G$. *Il est noté* $[E/G]$.

Exo: Montrer que $\pi_0^{pr}(K(G,E,1))$ est le préfaisceau quotient de $E$ par $G$. De plus, montrer que si $G$ opère sans points fixes sur $E$ alors la projection naturelle$K(G,E,1) \longrightarrow \pi_0^{pr}(K(G,E,1))$ est une équivalence (i.e. un isomorphisme dans $Ho(PrCh(C))$). En déduire que dans ce cas le champ $[E/G]$ s'identifie au faisceau quotient de $E$ par $G$.

On termine par une description du champ associé à $K(G,E,1)$. On se donne donc un faisceau $E$ muni d'une action de $G$. On définit un préchamp $B(G,E)$ de la façon suivante. Pour $X \in C$, les objets du groupoide $B(G,E)(X)$ sont les couples $(E_0,u)$, où $E_0 \in G - Tors(X)$ est un $G$-torseur sur $X$, et $u : E_0 \longrightarrow E_{|X}$ est un morphisme de faisceaux sur $C/X$ compatible avec l'action de $G_{|X}$. Un morphisme $(E_0,u) \longrightarrow (E'_0,u')$ est la donnée d'un morphisme $f : E_0 \longrightarrow E'_0$ de $G$-torseurs sur $X$, tel que $u' \circ f = u$. De plus, pour $f : Y \to X$ un morphisme dans $C$, le foncteur

$$f^* : B(G,E)(X) \longrightarrow B(G,E)(Y)$$

envoie par définition $(E_0,u)$ sur $((E_0)_{|Y}, u_{|Y})$, où le morphisme $u_{|Y}$ est le morphisme induit par restriction de $C/X$ à $C/Y$.

Il existe un morphisme de préchamps

$$j : K(G,E,1) \longrightarrow B(G,E)$$

défini de la façon suivante. Pour $X \in C$ le foncteur

$$j_X : K(G,E,1)(X) \longrightarrow B(G,E)(X)$$

envoie un objet $x \in E(X)$ sur l'unique morphisme $G$-invariant de faisceaux sur $C/X$

$$G_{|X} \longrightarrow E_{|X}$$

(qui envoie l'élément neutre de $G_{|X}$ sur le point $x$). En considérant $G_{|X}$ comme le $G$-torseur trivial sur $X$, cela donne un objet de $B(G,E)(X)$. Ceci définit le foncteur $j_X$ au niveau des objets. On laisse en exo la définition de $j_X$ au niveau des morphismes (on utilisera que $G(X)$ s'identifie au groupe des automorphismes du $G$-torseur trivial sur $X$).

**Théorème 2.5** *Le morphisme*

$$K(G,E,1) \longrightarrow B(G,E)$$

*est un champ associé. Ainsi, on a*

$$[E/G] \simeq B(G,E).$$

*Preuve:* C'est essentiellement la même que pour le théorème 2.5. On la laisse en exo. □