Cours 8: Champs IV

Dans ce cours on se place sur le site de Grothendieck Aff des schémas affines muni de la topologie étale. Nous avons vu aux cours précédents qu'il existe une catégorie homotopique des préchamps $Ho(PrCh(Aff))$ est des foncteurs pleinements fidèles

$$Sh(Aff) \hookrightarrow Ho(Ch(Aff)) \hookrightarrow Ho(PrCh(Aff)).$$

Par ces foncteurs nous identifierons par la suite les catégories $Sh(Aff)$ et $Ho(Ch(Aff))$ à des sous-catégories pleines de $Ho(PrCh(Aff))$. Ainsi, les sous-catégories de $Sh(Aff)$ formées des espaces algébriques, des schémas et des schémas affines seront aussi identifiées à leurs images essentielles dans $Ho(Ch(Aff))$. Ainsi, nous dirons qu'un champ $F \in Ho(Ch(Aff))$ est un espace algébrique, ou un schéma, ou un schéma affine, s'il est isomorphe dans $Ho(Ch(Aff))$ à l'image d'un espace algébrique, ou d'un schéma, ou d'un schéma affine, par le foncteur $Sh(Aff) \hookrightarrow Ho(Ch(Aff))$.

De façon générale nous utiliserons l'expression *morphisme de champs* (ou encore *morphisme de préchamps*, ou bien simplement *morphisme*) pour signifier *morphisme* dans $Ho(Ch(Aff))$ (ou bien dans $Ho(PrCh(Aff))$). Ainsi, sauf mention contraire, un *morphisme* sera une classe d'isomorphismes de morphismes faibles (voir le théorème 2.4 du cours 5).

1 Champs algébriques

Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme dans $Ho(Ch(Aff))$, $X \in Aff$ et $x : X \longrightarrow G$ un morphisme. La *fibre de f en x* est part définition le champ $F \times^h_G X$. Supposons que le morphisme $x : X \longrightarrow G$ corresponde, par l'isomorphisme $[X, G] \simeq \pi_0(G(X))$, à un objet $x \in G(X)$ (bien défini à isomorphisme près). Alors le champ $F \times^h_G X$ se décrit de la façon suivante. Pour $Y \in Aff$, un objet de de $(F \times^h_G X)(Y)$ est la donné d'un triplet (z, u, α), où z est un objet dans $F(Y)$, $u : Y \longrightarrow X$ est un morphisme dans Aff, et $u : f(z) \simeq u^*(x)$ est un isomorphisme dans $G(Y)$. Un morphisme $(z, u, \alpha) \longrightarrow (z', u, \alpha')$ est la donnée d'un morphisme $z \rightarrow z'$ dans $F(Y)$, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} f(z) \arrow[r] \arrow[d] & f(z') \arrow[dl] \\ u^*(x). & \end{tikzcd}$$

Il n'y a pas de morphisme $(z, u, \alpha) \longrightarrow (z', u, \alpha')$ pour $u \neq u'$.

Définition 1.1 *1. Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ de champs est* représentable *(resp.* représentable par un schéma*, resp.* représentable par un schéma affine*) si pour tout $X \in Aff$ et tout*

$x : X \longrightarrow G$ la fibre de f en x, $F \times^h_G X$ est un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine).

2. *Un morphisme représentable $f : F \longrightarrow G$ de champs est* lisse *(resp.* étale*, resp.* quasi-compact*, resp.* localement de présentation finie*, resp.* une immersion fermée*, resp.* une immersion ouverte *…) si pour tout $X \in Aff$, le morphisme induit d'espaces algébriques*

$$F \times^h_G X \longrightarrow X$$

est lisse (resp. étale, resp. quasi-compact, resp. localement de présentation finie, resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte …) au sens des espaces algébriques.

On remarque que les morphismes représentables (resp. représentables lisses, étales …) sont stables par composition (Exo). Ils sont aussi stables par changement de base au sens des produits fibrés homotopiques (Exo).

Une propriété importante des morphismes représentables est la suivante (elle est utile pour montrer qu'un morphisme n'est pas représentable).

Proposition 1.2 *Si $f : F \longrightarrow G$ est un morphisme représentable, alors pour tout $X \in Aff$ et $x \in [X, F]$ le morphisme induit*

$$f : \pi_1(F, x) \longrightarrow \pi_1(G, f(x))$$

est un monomorphisme de faisceaux.

Preuve: Si f est représentable, alors pour tout $Y \to X$ le groupoide $(F \times^h_G X)(Y)$ est équivalent à un ensemble. En particulier les groupes d'automorphismes d'objets dans $(F \times^h_G X)(Y)$ sont triviaux.

Soit $X \in Aff$ et $x \in [X, F]$. Supposons qu'il existe $u : Y \longrightarrow X$ et $a \in \pi_1(F, s)(Y) = Aut_{F(Y)}(u^*(x))$ un automorphisme non trivial appartenant au noyau du morphisme

$$\pi_1(F, x)(Y) \longrightarrow \pi_1(G, f(x)).$$

On considère l'objet $(u^*(x), u, id)$, qui est un objet dans $(F \times^h_G X)(Y)$ (pour le morphisme $f(x) \in [X, G]$). De plus, l'automorphisme a de $u^*(x)$ induit par définition un automorphisme non trivial de l'objet $(u^*(x), u, id)$ dans le groupoide $(F \times^h_G X)(Y)$. Ceci implique que f n'est pas représentable. $\square$

Avant de donner la définition des champs algébriques nous avons besoin de la notion suivante.

Définition 1.3 *Un morphisme de champs $f : F \longrightarrow G$ est un* épimorphisme *si le morphisme induit $\pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(G)$ est un épimorphisme de faisceaux.*

On remarquera que $f : F \longrightarrow G$ est un épimorphisme si et seulement pour tout $X \in Aff$ et tout objet $x \in G(X)$ il existe une famille couvrante $\{U_i \longrightarrow X\}$ et des objets $y_i \in F(U_i)$ tel que $x_{|U_i}$ soit isomorphe à $f(y_i)$ pour tout i (i.e. tout objet de G est localement dans l'image essentielle de f).

Définition 1.4 *Un champ F est* algébrique[1] *s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

1. *Le morphisme diagonal*
$$F \longrightarrow F \times F$$
est représentable.

2. *Il existe des schémas affines $\{U_i\}$ et un épimorphisme lisse et repésentable*
$$p : U = \coprod_i U_i \longrightarrow F.$$
Un tel morphisme p est appelé un atlas pour *F.*

Nous allons voir que la condition (2) implique la condition (1). Nous présentons cependant la notion de champs algébriques sous cette forme qui est celle que l'on rencontre dans la littérature. De plus, il est souvent d'usage de remplacer la condition (1) par la condition plus forte suivante

$(1')$ Le morphisme diagonal
$$F \longrightarrow F \times F$$
est représentable quasi-compact et séparé.

En ce qui nous concerne nous nous intéresserons essentiellement aux champs algébriques F dont le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ est représentable et affine.

On termine ce paragraphe par les notions de finitude suivantes.

Définition 1.5 *Soit F un champ algébrique.*

1. *On dit que F est* quasi-compact *s'il existe un atlas*
$$p : U \longrightarrow F$$
avec U un schéma affine, et si de plus le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ est quasi-compact.

2. *Soit $X \in Aff$ et $F \longrightarrow X$ un morphisme. On dit que le champ F est* localement de présentation finie sur *X s'il existe un atlas*
$$p : U = \coprod_i U_i \longrightarrow F$$
avec chaque U_i de présentation finie sur X.

3. *Soit $X \in Aff$ et $F \longrightarrow X$ un morphisme. On dit que le champ F est* présentation finie sur *X s'il est localement de présentation finie sur X et quasi-compact.*

[1] Dans la littérature on touvera aussi la terminologie de *champ d'Artin*.

4. *On dit que F est* localement noethérien *s'il existe un atlas*

$$p : U = \coprod_i U_i \longrightarrow F$$

avec chaque U_i noethérien.

5. *On dit que F est* noethérien *s'il est localement noethérien et quasi-compact.*

2 Quelques propriétés élémentaires

On commence par une proposition qui précise la définition 1.4.

Proposition 2.1 *Soit F un champ. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ est représentable.*

2. *Pour tout schéma affine X et tout $x, y \in F(X)$, le faisceau $\underline{Iso}(x, y)$ est représentable par un espace algébrique.*

3. *Pour tout schémas affines X et Y, et tout morphismes $X, Y \longrightarrow F$ le champ $X \times^h_F Y$ est représentable.*

Preuve: Dire que $F \longrightarrow F \times F$ est représentable est équivalent à dire que pour tout schéma affine X et tout morphisme $(x, y) : X \longrightarrow F \times F$, le champ $X \times^h_{F\times F} F$ est représentable. On voit que le champ $X \times^h_{F\times F} F$ est isomorphe au faisceau $\underline{Iso}(x, y)$. Ainsi (1) est équivalent à (2).

Pour tout schémas affines X et Y, et tout morphismes $X, Y \longrightarrow F$ on a

$$X \times^h_F Y \simeq (X \times Y) \times^h_{F\times F} F.$$

Ainsi, (1) $\Rightarrow$ (3). Inversement, tout morphisme $X \longrightarrow F \times F$ se factorise par

$$X \longrightarrow X \times X \longrightarrow F \times F.$$

Ainsi, on a

$$X \times^h_{F\times F} F \simeq X \times^h_{X\times X} (X \times^h_F X),$$

et donc (3) $\Rightarrow$ (1). □

Proposition 2.2 *Soit F un champ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le champ F est algébrique.*

2. *Il existe des schémas affines $\{U_i\}$ et un épimorphisme représentable et lisse*

$$p : U = \coprod_i U_i \longrightarrow F.$$

Preuve: Par définition (1) $\Rightarrow$ (2). Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Pour cela on utilise la proposition 2.1 (3).

Soit X et Y deux schémas affines et $x : X \longrightarrow F$ et $y : Y \longrightarrow F$ deux points. On regarde $X \times^h_F Y \longrightarrow X$, qui est morphisme de faisceaux (Exo: vérifier que le champ $X \times^h_F Y$ est équivalent à un faisceau), et on cherche à montrer que c'est un espace algébrique. On applique alors la proposition 1.2 du cours 4 qui permet de passer à un recouvrement étale de X. Ainsi, quite à remplacer X par un recouvrement étale on peut supposer que le morphisme $X \longrightarrow F$ se factorise par $x' : X \longrightarrow U$. On a alors

$$X \times^h_F Y \simeq X \times^h_U (U \times^h_F Y).$$

Comme par hypothèse $U \times^h_F Y$ est un espace algébrique on voit que $X \times^h_F Y$ est un espace algébrique. $\square$

On donne maintenant quelques critères généraux pour construire des champs algébriques.

Proposition 2.3 *1. Un espace algébrique est un champ algébrique.*

2. Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de champs avec G un champ algébrique. On suppose qu'il existe un atlas

$$\{U_i \longrightarrow G\}$$

tel que chaque $F \times^h_G U_i$ soit un champ algébrique. Alors F est un champ algébrique.

3. Soit $F_1 \longrightarrow F_0 \longleftarrow F_2$ un diagramme de champs algébriques. Alors $F_1 \times^h_{F_0} F_2$ est un champ algébrique.

4. Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme représentable. Si G est algébrique alors F aussi.

Preuve: Exo (s'insipérer des faits analogues pour les espaces algébriques). $\square$

On termine ce paragraphe par la construction de champs algébriques comme champs quotients.

Proposition 2.4 *Soit G un espace algébrique en groupes lisse sur $* = Spec\,\mathbb{Z}$. Soit X un espace algébrique sur lequel G opère. Alors le champ quotient $[X/G]$ est un champ algébrique.*

Preuve: On comence par un lemme général sur les champs quotients. Pour cela on rappelle qu'il existe des morphismes naturels

$$X \longrightarrow K(G, X, 1) \longrightarrow [X/G].$$

Lemme 2.5 *Soit $Y \longrightarrow [X/G]$ un morphisme avec Y un schéma affine, correspondant à un diagramme*

$$Y \longleftarrow E \longrightarrow X$$

où $E \to Y$ est un $G_{|Y}$-torseur. Alors, le champ $Y \times_{[X/G]} X$ s'identifie au faisceau E.

Preuve: Soit $Z \in Aff$. Le groupoide $(Y \times_{[X/G]} X)(Z)$ s'identifie à l'ensemble des couples (a,u), avec $a : Z \rightarrow Y$ et $u : G_{|Z} \simeq E_{|Z}$ un isomorphisme de $E_{|Z}$ avec le $G_{|Z}$-torseur trivial (Exo: le vérifier). L'image de l'unité de $G(Z)$ par l'isomorphisme u donne un point dans $E(Z)$. Lorsque Z varie dans les schémas affines ceci définit un morphisme $Y \times_{[X/G]} X \longrightarrow E$ que l'on voit être un isomorphisme (Exo). $\Box$

On revient à la preuve de la proposition. Pour cela on montre que le morphisme

$$X \longrightarrow [X/G]$$

est un épimorphisme représentable et lisse. Cela impliquera que $[X/G]$ est un champ algébrique, car en composant avec un atlas pour X on trouvera un épimorphisme lisse $\coprod U_i \longrightarrow [X/G]$ avec U_i des schémas affines et on pourra appliquer la proposition 2.2.

Le fait que $X \longrightarrow [X/G]$ soit un épimorphisme est général. En effet, le morphisme induit sur les faisceaux π_0 est la projection naturelle

$$X \longrightarrow \pi_0([X/G]) = X/G,$$

où X/G est le faisceau quotient de X par G. C'est donc un épimorphisme de faisceaux.

Soit maintenant $Y \in Aff$ et $Y \longrightarrow [X/G]$ un morphisme. Par le lemme 2.5 on trouve que $Y \times_{[X/G]} X \longrightarrow Y$ est un $G_{|Y}$-torseur. Ainsi, après un recouvrement étale de Y ce morphisme est isomorphe à la projection naturelle

$$Y \times G \longrightarrow Y.$$

Il est donc représentable et lisse (car G est lisse). $\Box$

Le proposition 2.4 possède aussi la version relative suivante. On se donne un schéma affine $S = Spec\, k$, X un espace algébrique sur S (i.e. muni d'un morphisme $X \longrightarrow S$), et G un espace algébrique en groupes lisse sur S (i.e. un objet en groupes dans les espaces algébriques lisses sur S) qui opère sur X. On peut alors définir le champ quotient $[X/G]$ qui est un champ muni d'un morphisme vers S. Alors la conclusion de la proposition 2.4 reste vraie, et la preuve est la même: le champ $[X/G]$ est algébrique.

Corollaire 2.6 *Soit G un espace algébrique en groupes lisse. Alors le champ BG est un champ algébrique.*

*Preuve:*En effet, on a $BG = [*/G]$. $\Box$

Le corollaire 2.6 montre en particulier que BGl_n est un champ algébrique (on rappelle que Gl_n est le schéma en groupes $A \mapsto Gl_n(A)$, et est lisse car est un ouvert de $\mathbb{A}^{n^2}$).

3 Deux exemples

Nous allons commencer par définir, pour tout entier $n > 0$, un sous-préchamp $\underline{Vect}_n$ du champ des modules $\underline{Mod}$ (voir le cours 6). Pour cela, on rappelle qu'un A-module M est projectif s'il existe un A-module N tel que $M \oplus N$ soit un A-module libre. On dit de plus que M est projectif de rang n (on dit aussi *est un fribé vectoriel de rang n*) si pour tout corps K et tout morphisme $A \longrightarrow K$, on a $Dim_K M \otimes_A K = n$. De même, nous dirons qu'un $\underline{A}$-module M est projectif de rang n si le A-module M_{id} l'est.

Par définition $\underline{Vect}_n(A)$ est le sous-groupoide plein de $\underline{Mod}(A)$ des A-modules projectifs de rang n. Il est clair que pour un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ le foncteur

$$\underline{Mod}(A) \longrightarrow \underline{Mod}(B)$$

envoie le sous-groupoide $\underline{Vect}_n(A)$ dans $\underline{Vect}_n(B)$. Ainsi, $\underline{Vect}_n$ est un sous-préchamp plein de $\underline{Mod}$.

Proposition 3.1 *Le préchamp $\underline{Vect}_n$ est un champ algébrique.*

Preuve: On commence par remarquer que $\underline{Vect}_n$ est un sous-champ de $\underline{Mod}$ en montrant qu'être projectif de rang n est une condition locale (voir la proposition p.2 du cours 6). Ceci se traduit par la lemme suivant que nous admettrons (voir par exemple [SGA1, Exp. VIII Cor 1.11]).

Lemme 3.2 *Un A-module M est projectif de rang n si et seulement s'il existe un recouvrement fpqc $\{A \longrightarrow A_i\}$ tel que M_i soit un A_i-module projectif de rang n.*

Ceci montre donc que $\underline{Vect}_n$ est un sous-champ de $\underline{Mod}$. Montrons maintenant qu'il est algébrique. Pour cela nous allons l'identifier au champ $BGl_n = [*/Gl_n]$, qui est algébrique par le corollaire 2.6. On construit un morphisme de préchamps

$$j : K(Gl_n, 1) \longrightarrow \underline{Vect}_n$$

qui sur un anneau A est donné par le fibré vectoriel trivial $\underline{A}^n \in \underline{Vect}_n(A)$, et par l'isomorphisme naturel

$$Gl_n(A) \simeq Aut_{A-Mod}(A^n) \simeq Aut_{\underline{A}-Mod}(\underline{A}^n).$$

Comme on sait déjà que $\underline{Vect}_n$ est un champ il nous reste qu'à montrer que le morphisme j est une équivalence locale. Par construction j est un morphisme plein et donc induit des isomorphismes sur le faisceaux π_1. Au niveau des faisceaux π_0 on a

$$\pi_0(K(Gl_n, 1)) = * \longrightarrow \pi_0(\underline{Vect}_n) \simeq *$$

qui ne peut être qu'un isomorphisme. $\square$

Soit A un anneau commutatif. Rappelons qu'une A-algèbre (associative unitaire) est la donnée d'un A-module R muni de deux morphismes de A-modules

$$\mu : R \otimes_A R \longrightarrow R$$

$$e : A \longrightarrow R$$

qui vérifient des axiomes d'associativité et d'unité évidents.

De même, une $\underline{A}$-algèbre R consiste en les données suivantes.

- Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $u : A \longrightarrow B$, une B-algèbre $R_u \in B - Alg$ (associative et unitaire).

- Pour tout diagramme commutatif d'anneaux commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[dl, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

un isomorphisme de C- algèbres

$$\gamma_f^R : R_u \otimes_B C \longrightarrow R_v$$

(simplement notés γ_f lorsque R est clair).

On demande de plus que ces données satisfassent les deux conditions suivantes:

- $$\gamma_{id} = id$$

- Pour tout diagramme commutatif d'anneaux commutatifs

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "u"] & \\ D & C \arrow[l, "g"] & B \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} (R_u \otimes_B C) \otimes_C D \arrow[r, "\gamma_f \otimes_C D"] \arrow[d, "\alpha"'] & R_v \otimes_C D \arrow[d, "\gamma_g"] \\ R_u \otimes_B D \arrow[r, "\gamma_{g \circ f}"'] & R_w, \end{tikzcd}$$

où $\alpha : (R_u \otimes_B C) \otimes_C D \simeq R_u \otimes_B D$ est l'isomorphisme naturel de simplification des produits tensoriels (qui envoie $(m \otimes c \otimes d)$ sur $(m \otimes g(c).d)$).

Un morphisme $\phi : R \to R'$ dans de $\underline{A}$-algèbres consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$\phi_u : R_u \longrightarrow R'_u$$

pour tout $u : A \longrightarrow B$, tel que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[dl, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} R_u \otimes_B C \arrow[r, "\phi_u \otimes_B C"] \arrow[d, "\gamma_f"'] & R'_u \otimes_C D \arrow[d, "\gamma_f"] \\ R_v \arrow[r, "\phi_f"'] & R'_v. \end{tikzcd}$$

Ainsi définies les $\underline{A}$-algèbres forment un groupoide noté $\underline{A} - Alg$. De plus, tout comme pour le cas des $\underline{A}$-modules, on dispose pout tout morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ d'un foncteur

$$\underline{A} - Alg \longrightarrow \underline{B} - Alg$$

qui fait de $A \mapsto \underline{A} - Alg$ un préchamp sur Aff. Ce préchamp sera noté $\underline{Ass}$ (pour algèbres *ass*ociatives).

Lemme 3.3 *Le préchamp* $\underline{Ass}$ *est un champ.*

Preuve: Soit A un anneau commutatif et R et R' deux $\underline{A}$-algèbres. Le préfaisceau $\underline{Iso}(R, R')$ sur Aff/X, est isomorphe au préfaisceau qui envoie $u : A \to B$ sur l'ensemble $Iso_{B-Alg}(R_{id} \otimes_A B, R'_{id} \otimes_A B)$, des isomorphismes de B-algèbres entre $R_{id} \otimes_A B$ et $R'_{id} \otimes_A B$ (ceci se déduit du lemme 1.6 du cours 6). Notons M et N les A-modules sous-jacents aux A-algèbres R_{id} et R'_{id}. Alors, on montre facilement que le préfaisceau $\underline{Iso}(R, R')$ est un sous-faisceau du faisceau $\underline{Hom}(M, N)$, des morphismes de A-modules de M dans N (voir la preuve de la proposition 2 du cours 6). Ceci montre que la condition (1) de la proposition 4.5 du cours 5 est satisfaite.

Pour la condition (2) de la proposition 4.5 du cours 5 on commence par utiliser l'équivalence entre A-modules et $\underline{A}$-modules (voir le lemme 1.6 du cours 6). On voit ainsi qu'il faut démontrer le fait suivant:

Soit A un anneau commutatif et $\{A \longrightarrow A_i\}$ une famille couvrante étale. Pour toute famille de A_i-algèbres R_i, et isomorphismes de $A_{i,j}$-algèbres

$$\phi_{i,j} : R_i \otimes_{A_i} A_{i,j} \simeq R_j \otimes_{A_j} A_{i,j}$$

tel que

$$(\phi_{i,i}) \otimes_{A_{i,i}} A_i = id_{R_i} \qquad (\phi_{j,k} \otimes_{A_{j,k}} A_{i,j,k}) \circ (\phi_{i,j} \otimes_{A_{i,j}} A_{i,j,k}) = \phi_{i,k} \otimes_{A_{i,k}} A_{i,j,k}$$

il existe une A-algèbre R et des isomorphismes de A_i-algèbres

$$\alpha_i : R \otimes_A A_i \simeq R_i$$

tel que

$$\phi_{i,j} = (\alpha_j \otimes_{A_j} A_{i,j}) \circ (\alpha_i \otimes_{A_i} A_{i,j})^{-1}.$$

Soit donc une donnée comme ci-dessus. En oubliant la structure d'algèbre, on trouve une donnée de descent pour le champ $\underline{Mod}$. Elle se recolle donc en un A-module R muni d'isomorphismes

$$\alpha_i : R \otimes_A A_i \simeq R_i$$

comme ci-dessus. La structure d'algèbre sur R, c'est à dire les deux morphismes

$$\mu : R \otimes_A R \longrightarrow R \qquad e : A \longrightarrow R,$$

se reconstruise localement en recollant les morphismes

$$\mu_i : (R \otimes_A A_i) \otimes_{A_i} (R \otimes_A A_i) \longrightarrow (R \otimes_A A_i) \qquad e_i : A_i \longrightarrow (R \otimes_A A_i)$$

qui sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes_A A_i) \otimes_{A_i} (R \otimes_A A_i) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i \otimes \alpha_i"] & (R \otimes_A A_i) \arrow[d, "\alpha_i"] \\
R_i \otimes_{A_i} R_i \arrow[r] & R_i
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[dr] & (R \otimes_A A_i) \arrow[d, "\alpha_i"] \\
& R_i.
\end{tikzcd}$$

On vérifie que ceci muni R d'une structure de A-algèbre associative telle que chaque α_i soit un isomorphisme d'algèbres. Ceci montre que R ainsi défini et les α_i recollent la donnée de descente.
$\square$

On dispose d'un morphisme d'oubli de la structure d'algèbre

$$f : \underline{Ass} \longrightarrow \underline{Mod}.$$

On définit alors le sous-champ $\underline{Ass}^n$ de $\underline{Ass}$ par

$$\underline{Ass}^n := \underline{Ass} \times^h_{\underline{Mod}} \underline{Vect}_n.$$

En d'autres termes, le sous-champ $\underline{Ass}^n \subset \underline{Ass}$ consiste en les $\underline{A}$-algèbres dont le $\underline{A}$-module sous-jacent est projectif de rang n.

Théorème 3.4 *Pour tout $n > 0$ le champ $\underline{Ass}$ est un champ algébrique.*

Preuve: On considère le morphisme d'oubli de la structure d'algèbre

$$f : \underline{Ass}^n \longrightarrow \underline{Vect}_n.$$

D'après la proposition 2.3 (2) il nous suffit de montrer que le champ

$$\underline{Ass}^n \times_{\underline{Vect}^n} X$$

est représentable pour un atlas $X \longrightarrow \underline{Vect}^n$. Or, nous savons que le fibré vectoriel trivial

$$* = Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow \underline{Vect}^n$$

est un atlas.

Pour tout anneau commutatif A, le groupoide $(\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *)(A)$ est le groupoide des couples (R, α), où R est une $\underline{A}$-algèbre, et $\alpha : R \simeq \underline{A}^n$ est un isomorphisme de $\underline{A}$-modules (Exo: décrire les morphismes de ce groupoides et remarquer que ce groupoide est équivalent à un ensemble).

On définit un préfaisceau F de la façon suivante: pour tout anneau commutatif A, $F(A)$ est l'ensemble des paires (μ, e), de morphismes

$$\mu : A^n \otimes_A A^n \longrightarrow A^n \qquad e : A \longrightarrow A^n$$

(ne vérifiant aucune conditions). Ce préfaisceau est isomorphe au schéma affine $Spec\,\mathbb{Z}[T^k_{i,j}, U_i]$. La bijection entre $F(A)$ les morphismes $u : \mathbb{Z}[T^k_{i,j}, U_i] \longrightarrow A$ est donnée par la relation

$$u(T^k_{i,j}) = pr_k(\mu(e_i, e_j)) \qquad u(U_i) = pr_i(e(1)),$$

où $pr_i : A^n \longrightarrow A$ est la i-ème projection, et $\{e_i\}$ désigne la base canonique de A^n. Il existe alors un morphisme de groupoides

$$(\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *)(A) \longrightarrow F(A)$$

qui à un couple (R, α) associe les morphismes

$$\mu : \; A^n \otimes_A A^n \xrightarrow{\alpha^{-1}} R \otimes_A R \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} A^n$$

$$e : \; A \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} A^n.$$

Il est facile de voir que le foncteur

$$(\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *)(A) \longrightarrow F(A)$$

ainsi défini est pleinement fidèle. Ainsi, lorsque A varie dans Aff^{op}, on trouve un morphisme de champs

$$\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} * \longrightarrow F$$

qui identifie $\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *$ à un sous-faisceau de F. Finalement, il est facile de voir que ce sous-faisceau est donné par le sous-schéma fermé

$$Spec\,A_0 \longrightarrow Spec\,\mathbb{Z}[T^k_{i,j}, U_i],$$

où A_0 est le quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[T^k_{i,j}, U_i]$ par les relations

$$\sum_i U_i T^k_{i,j} = \sum_i U_i T^k_{j,i} = 0 \;\forall\; j \neq k$$

$$\sum_i U_i T^k_{i,k} = \sum_i U_i T^k_{k,i} = 1 \;\forall k$$

$$\sum_l T^l_{j,k} T^m_{i,l} = \sum_l T^l_{i,j} T^m_{l,k} \;\forall\; i, j, k,$$

qui expriment les conditions d'unité et d'associativité des morphismes μ et e.

En conclusion, le champ $\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *$ est isomorphe au schéma affine

$$\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} * \simeq Spec\, \frac{\mathbb{Z}[T^k_{i,j}, U_i]}{(\sum_i U_i T^k_{i,j}, \sum_i U_i T^k_{j,i}, \sum_i U_i T^k_{i,k} - 1, \sum_i U_i T^k_{k,i} - 1, \sum_l T^l_{j,k}.T^m_{i,l} - T^l_{i,j}.T^m_{l,k})}.$$

$\square$

Un corollaire important de la preuve du théorème 3.4 est le suivant.

Corollaire 3.5 *Le champ $\underline{Ass}^n$ est de présentation finie sur $Spec\,\mathbb{Z}$ (et donc noethérien).*

Preuve: Lors de la preuve du théorème nous avons vu qu'un atlas de $\underline{Ass}^n$ est donné par

$$\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} * \longrightarrow \underline{Ass}^n,$$

et que $\underline{Ass}^n \times^h_{\underline{Vect}_n} *$ est de plus le spectre d'une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini. De plus, il est facile de voir que le morphisme diagonal $\underline{Ass}^n \longrightarrow \underline{Ass}^n \times \underline{Ass}^n$ est représentable affine, et donc quasi-compact (Exo: le démontrer). $\square$

Références

[SGA1] M. Artin, A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture notes in Math. **224**, Springer-Verlag 1971.