Cours 9: Quelques exercices

Dans ces exercices tous les (pré-)champs sont des champs sur le site Aff des schémas affines muni de la topologie étale.

1. Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de champs algébriques. Montrer que f est représentable si et seulement si pour tout $X \in Aff$ et pour tout morphisme $s : X \longrightarrow F$, le morphisme induit
$$\pi_1(F, s) \longrightarrow \pi_1(G, f(s))$$
est un monomorphisme de faisceaux sur Aff/X (on admettra qu'un faisceau qui est un champ algébrique est un espace algébrique).

2. Faire les détails de la définition des champs quotients $[X/G]$ pour G un espace algébrique en groupes sur $S = Spec\, k$ et X un espace algébrique sur S sur lequel G opère.

3. Soit R une $\mathbb{Z}$-algèbre associative et unitaire.

   (a) En s'inspirant de la notion de $\underline{A}$-module du cours 6, définir une notion de $R \otimes \underline{A}$-modules de sorte à définir un préchamp $R - \underline{Mod}$ sur Aff tel que $R - \underline{Mod}(A)$ soit un groupoide équivalent à celui des $R \otimes A$-modules.

   (b) Montrer que $R - \underline{Mod}$ ainsi défini est un champ. Montrer que le sous-préchamp $R - \underline{Vect}_n \subset R - \underline{Mod}$ formé des objets dont les modules sous-jacents sont projectifs de rang fini est un sous-champ.

   (c) On suppose que R est de présentation finie (i.e. engendrée comme algèbre associative par un nombre fini d'éléments et avec un nombre fini de relations). En utilisant le morphisme d'oubli de la structure de A-modules
$$R - \underline{Vect}_n \longrightarrow \underline{Vect}_n$$
montrer que $R - \underline{Vect}_n$ est un champ algébrique (on s'insipirera de la preuve du fait que $\underline{Ass}_n$ est un champ algébrique). Montrer de plus que $R - \underline{Vect}_n$ est un champ de type fini sur $Spec\, \mathbb{Z}$.

   (d) Si $f : R \longrightarrow R'$ est un morphisme d'algèbres de présentation finie montrer qu'il existe un morphisme de champs
$$f^* : R' - \underline{Vect}_n \longrightarrow R - \underline{Vect}_n$$
qui voit un R'-module comme un R-module à travers le morphisme f. Si f est surjectif montrer que f^* est une immersion fermée.

4. Soit F un préchamp. On définit un préchamp I_F, appelé le *préchamp d'inertie de F* de la façon suivante: pour $X \in Aff$ les objets du groupoide $I_F(X)$ sont les couples (x,u), où x est un objet de $F(X)$ et u est un automorphisme de x dans $F(X)$. Les morphismes dans $I_F(X)$, de (x,u) vers (y,v) sont les isomorphismes $f : x \to y$ dans $F(X)$ tel que $v \circ f = f \circ u$.

   (a) Montrer que I_F s'identifie au produit fibré homotopique
   $$I_F \simeq F \times^h_{F\times F} F$$
   du morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ par lui-même.

   (b) En déduire que I_F est un champ (resp. un champ algébrique) si F est un champ (resp. un champ algébrique).

   (c) On suppose que F est un champ algébrique. Montrer que la projection naturelle $I_F \longrightarrow F$ (oubli de l'automorphisme u) est représentable. Décrire l'espace algébrique $I_F \times_F X$ pour un morphisme $X \longrightarrow F$ correspondant à un objet $x \in F(X)$.

5. Soit F un champ algébrique tel que le morphisme $I_F \longrightarrow F$ soit lisse (on dira que F est une *gerbe lisse*).

   (a) Soit $X \in Aff$ et $x : X \longrightarrow F$ correspondant à un objet $x \in F(X)$. Montrer que l'espace algébrique en groupes $\underline{Aut}(x) := \underline{Iso}(x,x)$ est lisse sur X.

   (b) On considère la projection naturelle $F \longrightarrow \pi_0(F)$. Soit $X \in Aff$ et $x : X \longrightarrow F$ correspondant à un objet $x \in F(X)$. Montrer qu'il existe un morphisme naturel de préchamps au-dessus de X
   $$K(\underline{Aut}(x),1) \longrightarrow F \times^h_{\pi_0(F)} X,$$
   et que ce morphisme est une équivalence locale. En déduire que $F \times^h_{\pi_0(F)} X$ est un champ algébrique.

   (c) Déduire de la question précédente que pour tout $X \in Aff$ et tout morphisme $X \longrightarrow \pi_0(F)$, le champ $F \times^h_{\pi_0(F)} X$ est algébrique, et localement pour la topologie étale sur X équivalent à BG pour G un espace algébrique en groupes lisses sur X. De plus le morphisme
   $$F \times^h_{\pi_0(F)} X \longrightarrow F$$
   est représentable.

   (d) En déduire que si $U \longrightarrow F$ est un atlas pour F, alors le morphisme composé $U \longrightarrow \pi_0(F)$ est un atlas pour $\pi_0(F)$, et donc que $\pi_0(F)$ est un espace algébrique.

6. (a) Soit $F \longrightarrow G$ un épimorphisme de champs. On se donne deux morphismes de champs
   $$G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G.$$
   On suppose que le morphisme induit
   $$G_0 \times^h_G F \longrightarrow G_1 \times^h_G F$$
   est une équivalence locale. Montrer que le morphisme $G_0 \longrightarrow G_1$ est une équivalence locale (et donc un isomorphisme dans la catégorie homotopique des champs).

(b) Déduire de ce qui précède qui si F est un champ algébrique noethérien alors toute chaine décroissante de sous-champs fermés $F_{n+1} \subset F_n \subset F$ est stationaire.