

Autour de quelques modèles de type Cucker-Smale déterministes et stochastiques

Congrès en l'honneur de P. Cattiaux et C. Léonard

Fanny Delebecque, IMT

En collaboration avec P. Cattiaux et Laure Pédèches

6 juin 2017

Modéliser le comportement collectif... Flocking

La notion de "flocking" est un type de comportement collectif particulier que l'on retrouve facilement dans la nature en observant le déplacement d'individus en grands groupes.



Modéliser le comportement collectif... Flocking

La notion de "flocking" est un type de comportement collectif particulier que l'on retrouve facilement dans la nature en observant le déplacement d'individus en grands groupes.



La propriété de "flocking" signifie que :

- les individus restent à une **distance bornée les uns des autres**
- les individus se déplacent **dans la même direction**

Modéliser le comportement collectif... Flocking

La notion de "flocking" est un type de comportement collectif particulier que l'on retrouve facilement dans la nature dans le déplacement de groupes d'individus



Questions de modélisation :

- Comment des règles locales à l'échelle de l'individu mènent à un comportement collectif ?
- Quel type de règles locales s'applique à l'échelle de l'individu ?

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Modèle de Cucker-Smale

Papiers fondateurs : Cucker S. et Smale S. 2007

- Cucker F., Smale S., "On the mathematics of emergence", *Japan J. Math.* 2007
- Cucker F., Smale S., "Emergent behavior in flocks", *IEEE Trans. Automat. Control*, 2007

On considère un groupe de N individus, l'individu i étant repéré par sa position $x_i \in \mathbb{R}^d$ et sa vitesse $v_i \in \mathbb{R}^d$.

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t)(v_j - v_i).$$

- λ mesure la force d'interaction entre les individus.
- La fonction $t \mapsto (\psi_{ij}(t))_{ij}$ est appelée *taux de communication* et $\psi_{ij}(t) \geq 0$ caractérise l'influence de l'individu j sur l'individu i .
- Un choix classique est $\psi_{ij}(t) = \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)$ où ψ est en général choisie positive, décroissante, (ex $\psi(r) = \frac{1}{(1+r^2)^\beta}$, β donné).

Modèle de Cucker-Smale

Papiers fondateurs : Cucker S. et Smale S. 2007

- Cucker F., Smale S., "On the mathematics of emergence", *Japan J. Math.* 2007
- Cucker F., Smale S., "Emergent behavior in flocks", *IEEE Trans. Automat. Control*, 2007

On considère un groupe de N individus, l'individu i étant repéré par sa position $x_i \in \mathbb{R}^d$ et sa vitesse $v_i \in \mathbb{R}^d$.

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t)(v_j - v_i).$$

- λ mesure la force d'interaction entre les individus.
- La fonction $t \mapsto (\psi_{ij}(t))_{ij}$ est appelée *taux de communication* et $\psi_{ij}(t) \geq 0$ caractérise l'influence de l'individu j sur l'individu i .
- Un choix classique est $\psi_{ij}(t) = \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)$ où ψ est en général choisie positive, décroissante, (ex $\psi(r) = \frac{1}{(1+r^2)^\beta}$, β donné).

Le modèle de Cucker-Smale est donc un **modèle agent-centré** (ou microscopique) **déterministe de type champ-moyen linéaire sur les vitesses**.

Un modèle attractif sur les vitesses

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|)(v_j - v_i). \quad (1)$$

Remarque : Sommant (1) sur i , on obtient :

- $\bar{v}(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(t) = \bar{v}^0$ **constant**
- $\bar{x}(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) = \bar{x}^0 + t\bar{v}^0$.

Considérons, pour $t > 0$ la quantité

$$z(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |v_i(t) - v_j(t)|^2 \left(= 2N \sum_{i=1}^N |v_i(t) - \bar{v}(t)|^2 \right).$$

Alors :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) |v_i - v_j|^2 \leq 0.$$

Peut-on montrer l'alignement des vitesses sur \bar{v} ? A quelles conditions ?

Notion de Flocking

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t)(v_j - v_i).$$

On dira qu'il y a *flocking* pour le groupe d'individus $\{(x_i(t), v_i(t))\}_{i=1}^N$ si :

$$\forall 1 \leq i, j \leq N, \quad \sup_{t \geq 0} |x_i(t) - x_j(t)| < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t) - v_j(t)| = 0$$

On peut ré-écrire la condition, en utilisant le centre de masse et la moyenne des vitesses :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \sup_{t \geq 0} |x_i(t) - \bar{x}(t)| < \infty \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t) - \bar{v}(t)| = 0$$

ou encore

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \sup_{t \geq 0} |x_i(t) - \bar{x}(t)| < \infty \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Cas ψ constant !

CS'07, ψ constante

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N (v_j - v_i) = -\lambda(v_i - \bar{v}).$$

Alors on rappelle que $\bar{v}(t) = \bar{v}^0$ et $\bar{x}(t) = \bar{x}^0 + t\bar{v}^0$.

Dans ce cas $z'(t) = -2\lambda z(t)$ et alors

$$z(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |v_i(t) - v_j(t)|^2 = z_0 e^{-2\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et bien sûr, $|x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq |x_i^0 - \bar{x}^0| + (\int_0^t e^{-\lambda s} ds) |v_i^0 - \bar{v}|$ borné !

Cas ψ minorée

CS'07, ψ minorée

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)(v_j - v_i).$$

Supposons maintenant ψ minorée : $\forall r \in \mathbb{R}, |\psi(r)| \geq \ell$, alors :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) |v_i - v_j|^2 \leq -\frac{\lambda \ell}{N} z(t)$$

d'où : $z(t) \leq z^0 e^{-\frac{\lambda \ell}{N} t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et, pour tout $t \geq 0$ et tout $1 \leq i, j \leq N$:

$$|x_i(t) - x_j(t)| \leq |x_i^0 - x_j^0| + \frac{2\sqrt{z^0} N}{\lambda \ell} \text{ borné.}$$

NB : Si z décroît suffisamment vite alors il y a nécessairement swarming ($\sup_{t \geq 0} |x_i(t) - x_j(t)|$ borné).

Cas $\psi(r) = \frac{1}{(1+r^2)^\beta}$, non minorée *a priori*

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{(1 + |x_i(t) - x_j(t)|^2)^\beta} (v_j - v_i).$$

Posons

$$\psi_\ell(u) = \inf_{0 \leq r \leq u} \psi(r) \text{ et } T_R = \inf \left\{ t, \max_{1 \leq i, j \leq N} |x_i(t) - x_j(t)| \geq R \right\},$$

alors, pour tout $t \leq T_R$ et $1 \leq i, j \leq N$:

$$|x_i(t) - x_j(t)| \leq |x_i^0 - x_j^0| + \frac{\sqrt{z(0)}N}{\lambda\psi_\ell(R^2)}.$$

Il existe donc un jeu de données initiales qui conduisent au flocking, quel que soit β .

Quelques résultats de flocking... cas $\psi(r) = \frac{1}{(1+r^2)^\beta}$

"Unconditional flocking" : cas $\beta \in [0, 1/2]$ [Cucker Smale '07], [Ha, Tadmor'08], [Ha Liu '09]

Considérons la solution $(x_i(t), v_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ de (1) associée à $(x_i^0, v_i^0)_{1 \leq i \leq N}$, alors, il existe $x_m > 0$ et $x_M > 0$ telles que, pour tout $t \geq 0$, $1 \leq i \leq N$:

$$x_m \leq |x_i(t) - \bar{x}(t)| \leq x_M, \quad \text{et} \quad |v_i(t) - \bar{v}| \leq |v_i^0 - \bar{v}| e^{-\psi_M t}$$

"Conditional flocking" : cas $\beta > 1/2$ [Cucker Smale '07], [Ha, Tadmor'08], [Ha Liu '09]

Considérons la solution $(x_i(t), v_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ de (1) associée à $(x_i^0, v_i^0)_{1 \leq i \leq N}$, telle que

$$(1 + 2N \|x^0 - \bar{x}^0\|)^{\frac{1-2\beta}{2}} > \frac{3N(2N)^{3/2}}{\lambda} \|v^0 - \bar{v}^0\| \left[\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1-2\beta}{2}} \right],$$

alors, la conclusion est la même.

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Cas non symétrique : Quelle différence ?

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t)(v_j - v_i) \quad (2)$$

On dit que le taux de communication est *non symétrique* dans les cas où

$$\psi_{ij}(X(t)) \neq \psi_{ji}(X(t)).$$

Cas Cucker-Smale '07 : $\psi_{ij}(X(t)) = \frac{1}{(1+|x_i(t)-x_j(t)|^2)^\beta}$ symétrique

Cas non symétrique : Quelle différence ?

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t)(v_j - v_i) \quad (2)$$

On dit que le taux de communication est *non symétrique* dans les cas où

$$\psi_{ij}(X(t)) \neq \psi_{ji}(X(t)).$$

Cas Cucker-Smale '07 : $\psi_{ij}(X(t)) = \frac{1}{(1+|x_i(t)-x_j(t)|^2)^\beta}$ symétrique

Différence principale : En sommant (1) sur i on avait :

- $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$
- l'équation était *dissipative* :
$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j} |v_i(t) - v_j(t)|^2 \right) = -\frac{\lambda}{N} \sum_{i,j} \psi_{ij}(X(t)) |v_i(t) - v_j(t)|^2 \leq 0$$

Cas "Motsch-Tadmor"

Motivations principales :

- Volonté de modéliser une interaction non symétrique (suit son prédécesseur, leader...)
- Cas de distribution **non homogène** des individus (par exemple deux groupes distants)

Cas "Motsch-Tadmor"

Motivations principales :

- Volonté de modéliser une interaction non symétrique (suit son prédécesseur, leader...)
- Cas de distribution **non homogène** des individus (par exemple deux groupes distants)

Choix "Motsch-Tadmor" (2011) :

$$\psi_{ij}(t) = \frac{N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}{\sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}, \quad \psi_{ij}(X) \neq \psi_{ji}(X)$$

L'influence de l'individu j sur l'individu i est normalisée par *l'influence totale du groupe*.

Cas "Motsch-Tadmor"

Motivations principales :

- Volonté de modéliser une interaction non symétrique (suit son prédécesseur, leader...)
- Cas de distribution **non homogène** des individus (par exemple deux groupes distants)

Choix "Motsch-Tadmor" (2011) :

$$\psi_{ij}(t) = \frac{N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}{\sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}, \quad \psi_{ij}(X) \neq \psi_{ji}(X)$$

L'influence de l'individu j sur l'individu i est normalisée par *l'influence totale du groupe*.

Différences principales : $\frac{d\bar{v}}{dt} \neq 0$ et le système n'est plus nécessairement dissipatif !

Cas "Motsch-Tadmor"

Choix "Motsch-Tadmor" (2011) :

$$\psi_{ij}(t) = \frac{N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}{\sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|)}, \quad \psi_{ij}(X) \neq \psi_{ji}(X)$$

L'influence de l'individu j sur l'individu i est normalisée par *l'influence totale du groupe*.

Différences principales : $\frac{d\bar{v}}{dt} \neq 0$ et le système n'est plus nécessairement dissipatif !

[Motsch, Tadmor, 2011]

Si la fonction ψ décroît suffisamment lentement : $\int_0^\infty \psi^2(r) dr = +\infty$, alors le modèle (2) a la propriété de flocking.

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Quel type de bruit ? Où ? État de l'art

Plusieurs phénomènes "aléatoires" différents à modéliser :

Liberté individuelle... Chaque individu a son propre aléa

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega_i(t)$$

où σ_i dépend de (x_i, v_i) uniquement.

[Cucker, Mordecki'08] : "smooth noise" (Brownien régularisé)

[Ha, Lee, Levy'09] : $\sigma_i = \sqrt{D}I_d$ et ω_i brownien d dim indépendants

[Pédèches'16]

Quel type de bruit ? Où ? État de l'art

Environnement bruité... Même bruit pour tous les individus

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega(t)$$

[Ahn, Ha'10] : $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$, $\omega = (W, \dots, W)$,
 W brownien (le même dans les d directions spatiales)

Quel type de bruit ? Où ? État de l'art

Environnement bruité... Même bruit pour tous les individus

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega(t)$$

[Ahn, Ha'10] : $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$, $\omega = (W, \dots, W)$,
 W brownien (le même dans les d directions spatiales)

Perception dans l'interaction bruitée...

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N (v_j(t) - v_i(t)) [\psi_{ij}(t) dt + \sigma_{ij}(t) d\omega_{ij}(t)]$$

où ω_{ij} bruit mono-dim.

[Ton, Linh, Yagi '14] : $\omega_{ij} = \omega$, $\sigma_{ij} = \sigma$, Stratonovitch differential

[Erban, Haskovec, Sun '15] : σ_i constant, (mean flocking), retard

Quelles différences ?

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega_i(t) \quad (3)$$

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega(t) \quad (4)$$

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N (v_j(t) - v_i(t)) [\psi_{ij}(t) dt + \sigma_{ij}(t) d\omega_{ij}(t)] \quad (5)$$

Équilibres : NB : $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. On se souvient que le modèle déterministe (1) admettait un équilibre pour les vitesses : $\forall i = 1 \dots N, v_i(t) = \bar{v}^0$.

- Dans le cas (5) c'est toujours le cas,
- Dans le cas général pour (3) et (4), il n'y a pas d'équilibre clair.

Cas environnement bruité...

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t) d\omega(t)$$

Dans le cas (4), on a un équilibre $v_i = v_e$ uniquement si $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$ où v_e fixé comme dans [Ahn, Ha '10]

A noter : dans le cas où $\sigma_i(t) = \sigma(t)$, alors on peut décomposer simplement la dynamique en 2 :

- la dynamique de la moyenne des vitesses : $\bar{v}(t) = \frac{1}{N} \sum_i v_i(t)$ donnée par un processus purement stochastique :

$$d\bar{v}(t) = \sigma d\omega(t)$$

- l'écart à la vitesse moyenne : $\hat{v}_i(t) = v_i(t) - \bar{v}(t)$ vérifie le problème de Cucker-Smale déterministe initial :

$$\frac{d\hat{v}_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (\hat{v}_j(t) - \hat{v}_i(t))$$

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Quelle notion de "flocking aléatoire" ?

Notion de flocking aléatoire, [Cattiaux, D., Pédèches '17]

Considérons un processus stochastique $(x_i(t), v_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que $dx_i(t) = v_i(t)dt$.

- *flocking presque sûr* : pour tout $i = 1 \dots N$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t) - \bar{v}(t)| = 0 \text{ et } \sup_{t \geq 0} |x_i(t) - \bar{x}(t)| < \infty \text{ presque surement.}$$

- \mathbb{L}^p *flocking* : pour tout $i = 1 \dots N$,

$$\mathbb{E}(|v_i(t) - \bar{v}(t)|^p) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|x_i(t) - \bar{x}(t)|) < \infty.$$

Environnement bruité, cas simple

On considère le modèle d'environnement bruité dans le cas

- $\psi_{ij}(t) = \psi > 0$ constante
- $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$, v_e donnée constante
- $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^d)$, ω^k mouvement brownien.

$$dv_i^k(t) = -\lambda\psi \left(v_i^k(t) - \bar{v}^k(t) \right) dt + D \left(v_i^k(t) - v_e^k \right) d\omega^k(t).$$

Stratégie générale :

Étape 1 : étude de l'évolution de $\bar{v}(t)$

Étape 2 : étude de l'écart à la moyenne : $\hat{v}_i(t) = v_i(t) - \bar{v}(t)$.

Environnement bruité, cas simple

On considère le modèle d'environnement bruité dans le cas

- $\psi_{ij}(t) = \psi > 0$ constante
- $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$, v_e donnée constante
- $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^d)$, ω^k mouvement brownien.

$$dv_i^k(t) = -\lambda\psi \left(v_i^k(t) - \bar{v}^k(t) \right) dt + D \left(v_i^k(t) - v_e^k \right) d\omega^k(t).$$

Étape 1 : échelle macro $d\bar{v}^k(t) = D(\bar{v}^k(t) - v_e^k)d\omega^k(t)$ et donc :

$$\bar{v}^k(t) = v_e^k + (\bar{v}^k(0) - v_e^k) e^{D\omega_t^k - \frac{D^2 t}{2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} v_e^k \text{ p.s.}$$

Environnement bruité, cas simple

On considère le modèle d'environnement bruité dans le cas

- $\psi_{ij}(t) = \psi > 0$ constante
- $\sigma_i(t) = D(v_i(t) - v_e)$, v_e donnée constante
- $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^d)$, ω^k mouvement brownien.

$$dv_i^k(t) = -\lambda\psi \left(v_i^k(t) - \bar{v}^k(t) \right) dt + D \left(v_i^k(t) - v_e^k \right) d\omega^k(t).$$

Étape 2 : échelle micro $d\hat{v}_i^k(t) = -\lambda\psi\hat{v}_i^k(t)dt - D\hat{v}_i^k d\omega^k(t)$, d'où

$$\hat{v}_i^k(t) = \hat{v}_i^k(0)e^{D\omega_t^k - \left(\frac{D^2}{2} + \lambda\psi\right)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad p.s.$$

Bilan : Pour tout $i = 1 \dots N$, pour tout $k = 1 \dots d$,

$$v_i^k(t) = \bar{v}^k(t) + \hat{v}_i^k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} v_e^k \quad p. s.$$

⇒ Flocking presque sûr inconditionnel.

Et pour les autres types de flocking ?

Environnement bruité, cas simple

$$\bar{v}^k(t) = v_e^k + (\bar{v}^k(0) - v_e^k)e^{D\omega_t^k - \frac{D^2}{2}t}$$

$$\hat{v}_i^k(t) = \hat{v}_i^k(0)e^{D\omega_t^k - (\frac{D^2}{2} + \lambda\psi)t}$$

Flocking \mathbb{L}^1 :

$$\mathbb{E} \left(|\hat{v}_i^k(t)| \right) = |\hat{v}_i^k(0)| e^{-\lambda\psi t} \mathbb{E} \left(e^{D\omega_t^k - \frac{D^2}{2}t} \right) = |\hat{v}_i^k(0)| e^{-\lambda\psi t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Positions : $\bar{x}_i^k(t) = \bar{x}_i^k(0) + \int_0^t \bar{v}_i^k(s) ds$.

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |\hat{x}_i^k(t)| \right) &\leq |\hat{x}_i^k(0)| + \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(|\hat{v}_i^k(s)| \right) ds \\ &\leq |\hat{x}_i^k(0)| + \int_0^{+\infty} |\hat{v}_i^k(0)| e^{-\lambda\psi s} ds < \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow Flocking \mathbb{L}^1 inconditionnel.

Environnement bruité, cas simple

$$\bar{v}^k(t) = v_e^k + (\bar{v}^k(0) - v_e^k)e^{D\omega_t^k - \frac{D^2}{2}t}$$

$$\hat{v}_i^k(t) = \hat{v}_i^k(0)e^{D\omega_t^k - (\frac{D^2}{2} + \lambda\psi)t}$$

Flocking \mathbb{L}^2 :

Positions : On a comme avant :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |\hat{x}_i^k(t)| \right) \leq |\hat{x}_i^k(0)| + \int_0^{+\infty} |\hat{v}_i^k(0)| e^{-\lambda\psi s} ds < \infty$$

Vitesses :

$$\mathbb{E} \left(|\hat{v}_i^k(t)|^2 \right) = |\hat{v}_i^k(0)|^2 e^{(D^2 - 2\lambda\psi)t} \mathbb{E} \left(e^{2D\omega_t^k - 2D^2t} \right) = |\hat{v}_i^k(0)|^2 e^{(D^2 - 2\lambda\psi)t}.$$

\mathbb{L}^2 flocking $\Leftrightarrow D^2 < 2\lambda\psi$

Résultats de flocking aléatoire

$$dv_i(t) = \frac{\lambda\psi}{N} \sum_{j=1}^N (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma_i(t)d\omega(t)$$

Environnement bruité, ψ constant, bruits plus généraux, [CDP'17]

- Cas $\sigma_i(t) = \sigma(v_i(t))$ avec σ fonction K Lipschitz
Si $2\psi\lambda > 4K^2d^2$ alors on a flocking presque-sûr et \mathbb{L}^2 flocking, mais $\bar{v}(t)$ ne converge pas nécessairement quand $t \rightarrow \infty$
- Cas $\sigma_i(t) = \sigma(x_i(t))$ où σ est \mathcal{C}^1 de dérivée bornée par K , alors :

$$\left[\exists M > 0, \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left(|x_i(t) - x_j(t)|^2 \right) \leq M < \infty \right] \Rightarrow \mathbb{L}^2 \text{ flocking}$$

Résultats de flocking aléatoire

$$dv_i(t) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t)|) (v_j(t) - v_i(t)) dt + \sigma(v_i(t)) d\omega(t)$$

Si ψ est localement Lipschitz et σ globalement K Lipschitz, si $r, a, b > 0$ et si on note $\psi_\ell(r) = \min_{0 \leq u \leq r} \psi(u)$ alors

- Si σ est diagonale et linéaire, i.e $\sigma^{k,k}(v) = D(v^k - v_e^k)$, alors il y a flocking presque sûr si $D \neq 0$, et, si $2\lambda\psi_{\max} \leq D^2$, alors il n'y a pas \mathbb{L}^2 flocking.
- De plus, si $\lambda\psi_\ell(r^2) > 2K^2(d^2 + (b - \frac{1}{2}))$ et si (x^0, v^0) vérifie, pour tout (i, j) :

$$|x_i(0) - x_j(0)| + \frac{\sqrt{z(0)}e^{a/2}}{\lambda\psi_\ell(r^2) - 2K^2(d^2 + (b - \frac{1}{2}))} < r$$

Alors il y a flocking avec une probabilité plus grande que $1 - e^{-2ab}$.

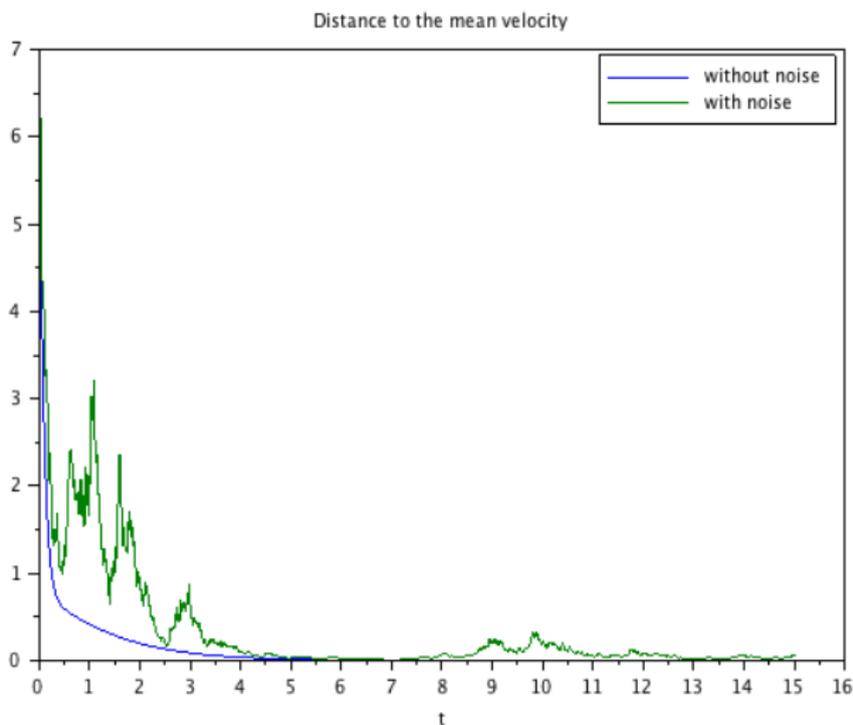


FIGURE: $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^N |v_i(t) - \bar{v}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ for $\sigma(v) = v$

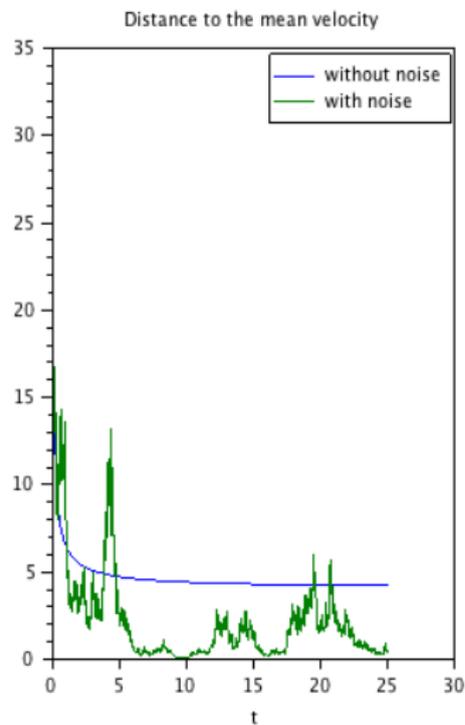
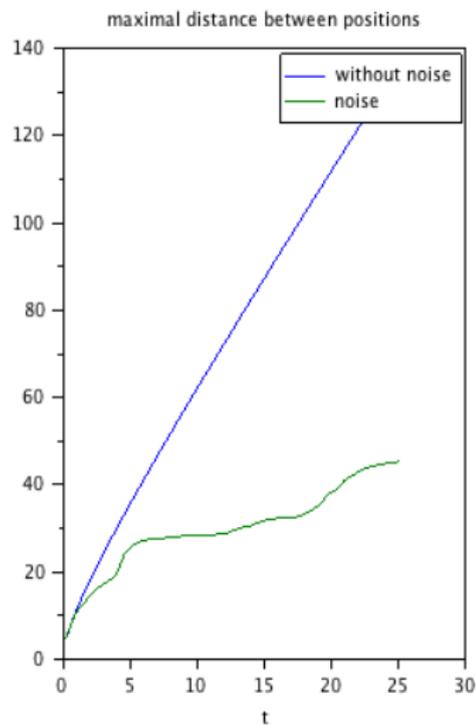


FIGURE: $(x^2(0), 5 v^2(0))$, $\sigma = v$ first case.

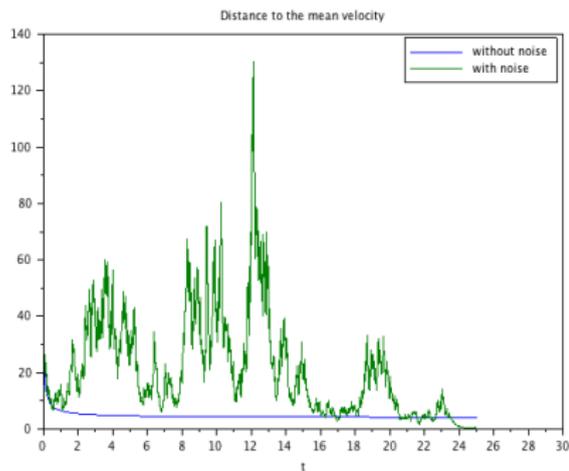


FIGURE: $(x^2(0), 5 v^2(0))$, $\sigma = v$
second case.

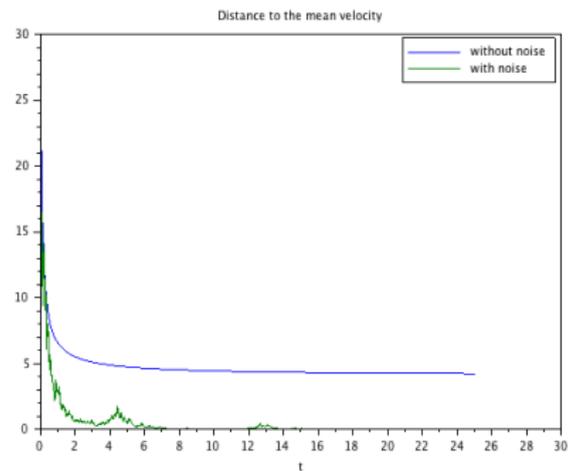


FIGURE: $(x^2(0), 5 v^2(0))$, $\sigma = v$ third case.

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Motivations

Il paraît naturel de se poser la question de délai entre l'observation des autres membres du groupe et l'adaptation de sa propre vitesse pour chaque individu. . .

⇒ Introduction d'un *terme de retard* dans le modèle. . .

Motivations

Il paraît naturel de se poser la question de délai entre l'observation des autres membres du groupe et l'adaptation de sa propre vitesse pour chaque individu. . .

⇒ Introduction d'un *terme de retard* dans le modèle. . .

C'est quoi une EDO à retard ? Une équation qui ressemble à

$$\begin{aligned}y'(t) &= F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq 0 \\y(t) &= y_0(t), \quad t \in [-\tau, 0]\end{aligned}$$

Motivations

Il paraît naturel de se poser la question de délai entre l'observation des autres membres du groupe et l'adaptation de sa propre vitesse pour chaque individu. . .

⇒ Introduction d'un *terme de retard* dans le modèle. . .

C'est quoi une EDO à retard ? Une équation qui ressemble à

$$\begin{aligned}y'(t) &= F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq 0 \\y(t) &= y_0(t), \quad t \in [-\tau, 0]\end{aligned}$$

Comme pour le bruit, la question est de savoir

- Où ? Sous quelle forme ?
- Dans quel type de modèle de Cucker-Smale ?
- Quel effet sur les solutions ? Sur les propriétés de flocking ?

Cucker-Smale avec retard

- [Liu, Wu'2014] *Flocking and asymptotic velocity of the Cucker-Smale model*

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \alpha \sum_{j \neq i} \psi_{ij}(\tilde{x}(t)) (\tilde{v}_j(t) - v_i(t)).$$

- [Erban, Haškovec, Sun'2015] *On Cucker-Smale with noise and delay*

$$dv_i = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (\tilde{v}_j(t) - \tilde{v}_i(t)) + \frac{\sigma_i}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (\tilde{v}_j(t) - \tilde{v}_i(t)) dB_i^t.$$

- [Choi, Haškovec'16] *Cucker-Smale with normalized com. weights and time delay*

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \phi_{ij}(x, t, \tau) (v_j(t - \tau) - v_i(t)),$$

où

$$\phi_{ij}(x, t, \tau) = \frac{\psi(|x_j(t - \tau) - x_i(t)|)}{\sum_{k \neq i} \psi(|x_k(t - \tau) - x_i(t)|)}$$

Quelles différences, quelles difficultés ?

Un premier type de modèle, du type [EHS'15] :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (\tilde{v}_j(t) - \tilde{v}_i(t))$$

avec $\psi_{ij} = \psi_{ji}$.

On a toujours $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$.

Mais... Supposons pour simplifier $\psi_{ij} = \psi$ constant.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\lambda\psi}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle v_j(t - \tau) - v_i(t - \tau), v_j(t) - v_i(t) \rangle$$

On ne connaît pas son signe : le système n'est plus dissipatif !

Quelles différences, quelles difficultés ?

Encore pire, l'autre type de modèle, du type [LW'14] :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i) \quad \text{ou} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|\tilde{x}_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i)$$

On n'a même plus $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \dots$

Quelles différences, quelles difficultés ?

Encore pire, l'autre type de modèle, du type [LW'14] :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i) \quad \text{ou} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|\tilde{x}_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i)$$

On n'a même plus $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \dots$

Dans tout ces papiers, on essaie de trouver *des conditions sur le retard pour avoir du flocking*. En général, il existe un retard critique en dessous duquel on a flocking conditionnel et au dessus duquel le système ne flocke plus.

Plus de détail sur la biblio. . .

Le modèle [LW'14] :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \alpha \sum_{j \neq i} \psi_{ij}(\tilde{x}(t)) (\tilde{v}_j(t) - v_i(t)).$$

Les auteurs "se ramènent à une écriture" qui n'est équivalente que dans le cas d'interaction normalisée. . .

Plus de détail sur la biblio...

Le modèle [LW'14] :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \alpha \sum_{j \neq i} \psi_{ij}(\tilde{x}(t)) (\tilde{v}_j(t) - v_i(t)).$$

Les auteurs "se ramènent à une écriture" qui n'est équivalente que dans le cas d'interaction normalisée...

Le modèle [EHS'15] :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(t) (\tilde{v}_j(t) - \tilde{v}_i(t)).$$

Cette fois, ce sont les hypothèses sur $t \mapsto \psi_{ij}(t)$ qui sont discutables, en l'occurrence "globalement lipschitzienne" et avec un genre de minoration, de sorte que l'équation sur les vitesses est *découplée de l'équation sur les positions*.

Chhuutttt... travaux en cours

Ce que l'on a réussi à faire dans le cas type [EHS'15] :

- Lever la condition $t \mapsto \psi_{ij}(t)$ globalement lipschitzienne
- Si on a swarming, i.e s'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{t>0} \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| \leq M$$

alors on a du flocking conditionnel (sur les données initiales), pour $\tau < \tau_c$ (τ_c est un retard critique).

Chhuutttt... travaux en cours

Ce que l'on a réussi à faire dans le cas type [EHS'15] :

- Lever la condition $t \mapsto \psi_{ij}(t)$ globalement lipschitzienne
- Si on a swarming, i.e s'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{t>0} \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| \leq M$$

alors on a du flocking conditionnel (sur les données initiales), pour $\tau < \tau_c$ (τ_c est un retard critique).

Ce qui nous intéresse vraiment et sur lequel on sèche : le cas [LW] non normalisé.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i) \quad \text{ou} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|\tilde{x}_i - x_j|) (\tilde{v}_j - v_i)$$

1 Quelques modèles de Cucker-Smale, Notion de Flocking...

- Modèle de Cucker Smale 2007, Flocking
- Choix du taux de communication symétrique
- Un cas non symétrique

2 Et si... on ajoutait du bruit ?

- Quel type de bruit ? où ?
- Quelle notion de "flocking aléatoire" ?
- Quels résultats de "flocking aléatoire" ?
- Des simulations pour aller plus loin...

3 Et si... on rajoutait du retard ?

- Quel retard ? Où ? État de l'art
- Simulations

Les différents modèles simulés

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j|) (\tilde{v}_j - \tilde{v}_i) \quad (\text{EHS})$$

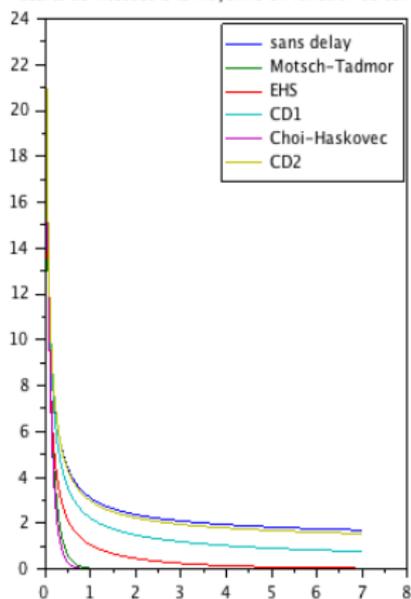
$$\frac{dv_i}{dt} = \lambda \sum_{j=1}^N \frac{\psi(|x_i - \tilde{x}_j|)}{\sum_{k=1}^N \psi(|x_i - \tilde{x}_k|)} (\tilde{v}_j - v_i) \quad (\text{Choi-Haskovek})$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j|) (\tilde{v}_j - v_i) \quad (\text{CD1})$$

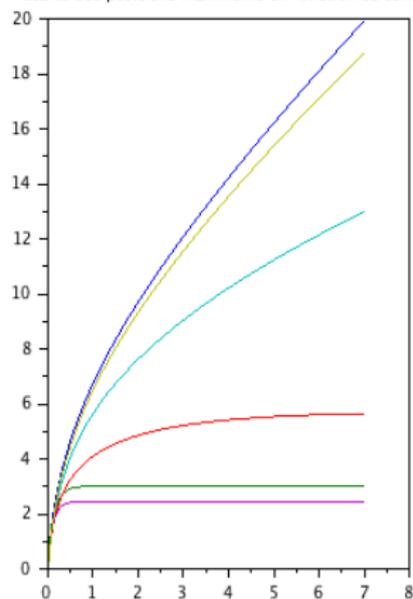
$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i - \tilde{x}_j|) (\tilde{v}_j - v_i) \quad (\text{CD2})$$

Quelques simulations de retard. . .

Ecarts de vitesses à la moyenne en fonction du temps



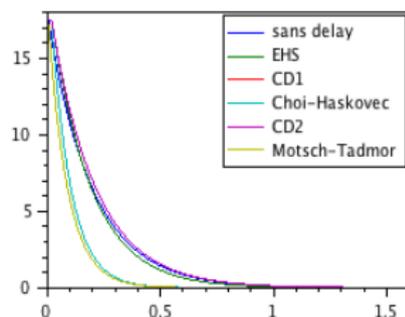
Ecarts des positions maximums en fonction du temps



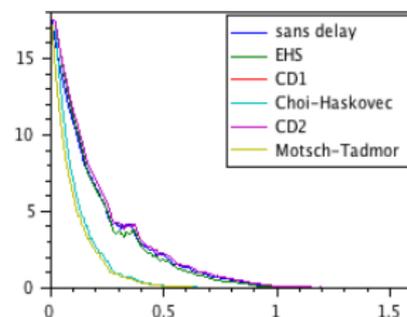
Cas $\psi_{ij}(x) = \frac{1}{(1+|x_i-x_j|^2)^\gamma}$, avec retard mais sans bruit.

Quelques simulations avec retard ET bruit. . .

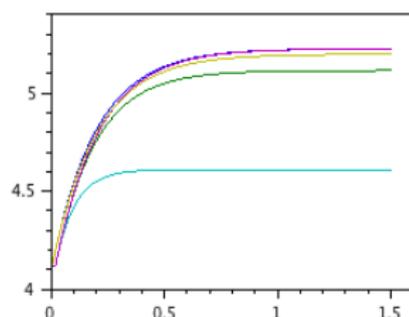
Ecart de vitesses à la moyenne en fonction du temps



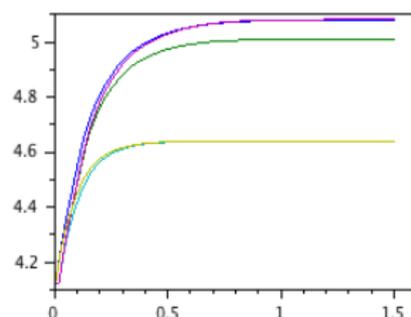
Ecart de vitesses à la moyenne en fonction du temps avec Bruit



Ecart des positions maximums en fonction du temps



Ecart des positions maximums en fonction du temps avec bruit



Cas ψ_{ij} constant, avec retard et bruit.

Merci de votre attention ... et Merci Patrick !