

# Régularisation entropique: du problème de Schrödinger aux simulations numériques

Guillaume Carlier <sup>a</sup>

Congrès en l'honneur de Patrick Cattiaux et Christian Léonard.  
Toulouse, juin 2017. Collaborations avec J.D. Benamou, L.  
Nenna, G. Peyré et S. Di Marino.

---

<sup>a</sup>CEREMADE, Université Paris Dauphine et MOKAPLAN (Inria-Dauphine).

## Introduction

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces polonais,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ ,  
 $c \in C(X \times Y)$ , problème de Monge-Kantorovich:

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \langle c, \gamma \rangle := \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y)$$

avec

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi_{1\#}\gamma = \mu, \pi_{2\#}\gamma = \nu\}$$

Cas quadratique. Notons  $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbf{R}^d$  de second moment finis, pour  $\rho_0$  et  $\rho_1$  dans  $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ , la 2-distance de Wasserstein entre  $\rho_0$  et  $\rho_1$ ,  $W_2(\rho_0, \rho_1)$  est donnée par

$$W_2^2(\rho_0, \rho_1) = \inf_{\gamma \in \Pi(\rho_0, \rho_1)} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |x - y|^2 d\gamma(x, y)$$

où  $\Pi(\rho_0, \rho_1)$  est l'ensemble des plans de transport entre  $\rho_0$  et  $\rho_1$  i.e. les probas sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$  ayant  $\rho_0$  et  $\rho_1$  pour marges.  $W_2$  est une distance sur  $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ ,  $(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), W_2)$  espace de Wasserstein.

Brenier, McCann: si  $\rho_0$  ne charge pas les hypersurfaces Lipschitz il y a une unique solution, qui est caractérisée par  $\gamma = (\text{id}, \nabla u)_\# \rho_0$  avec  $u$  convexe. Lien avec Monge-Ampère:

$$\det(D^2 u) \rho_1(\nabla u) = \rho_0, \quad u \text{ convexe.}$$

Théorie de la régularité L. Caffarelli (avancées récentes: Figalli, De Philippis). Interpolation (McCann): courbe de mesures  $t \in [0, 1] \mapsto \rho_t = ((1 - t) \text{id} + t \nabla u)_\# \rho_0$ , c'est la géodésique entre  $\rho_0$  et  $\rho_1$ . Notion de convexité par déplacement.

Formulation dynamique de Benamou-Brenier:

$$W_2^2(\rho_0, \rho_1) = \inf \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |v_t(x)|^2 \rho_t(dx) dt$$

sous les contraintes:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \rho|_{t=1} = \rho_1.$$

F. Otto: structure formelle de variété Riemannienne, calcul d'Otto. Formellement, étant donnée une énergie  $E$  sur  $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ , l'équation

$$\partial_t \rho = \operatorname{div}(\rho \nabla E'(\rho))$$

est le flot de gradient (pour  $W_2$ ) de  $E$ . En particulier

$E(\rho) = \int_{\mathbf{R}^d} \rho \log(\rho)$ : le flot de la chaleur est le flot de l'entropie pour  $W_2$ .

Jordan-Kinderlehrer et Otto, 1998, l'équation de Fokker-Planck:

$$\partial_t \rho - \Delta \rho - \operatorname{div}(\rho \nabla V) = 0$$

est le flot gradient pour  $W_2$  de

$$E(\rho) = \int_{\mathbf{R}^d} \rho \log(\rho) + \int_{\mathbf{R}^d} V \rho = \int_{\mathbf{R}^d} \rho \log \left( \frac{\rho}{e^{-V}} \right).$$

Résolution rigoureuse via un schéma d'Euler implicite: le schéma JKO. S'adapte à une variété considérable de situations: diffusions non linéaires (Otto, Agueh...), équations d'agrégation, milieux granulaires (Carrillo, Villani, McCann...), équations du quatrième ordre (films minces, Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn, McCann, Matthes, Savaré, Toscani...), Chapman-Rubinstein-Schatzman en superconductivité (Ambrosio-Serfaty)....

Trois points de vue: programmation linéaire, point de vue dual (le transport provient d'un potentiel: Monge-Ampère dans le cas quadratique), point de vue dynamique (Benamou-Brenier). Ces trois points de vue ont une version entropisée, qui se prête parfaitement à des calculs numériques.

## Plan

- ① Régularisation entropique et algorithmes (Sinkhorn, IPFP)
- ② Régularisation entropique des flots gradients Wasserstein
- ③ Formulation dynamique
- ④ Jeux à champ moyen par minimisation d'entropie

## Régularisation entropique

Résoudre un problème de transport optimal est généralement très coûteux, même pour des mesures empiriques, le problème approché en rajoutant  $\varepsilon$  fois une entropie:

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \langle c, \gamma \rangle + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \gamma \log \gamma$$

avec  $\varepsilon > 0$  et  $\mu$  et  $\nu$  d'entropie finie est beaucoup plus simple. C'est un problème de projection pour la divergence de Kullback-Leibler

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \text{KL}(\gamma | \gamma^\varepsilon) := \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \gamma \log \left( \frac{\gamma}{\gamma^\varepsilon} \right), \quad \gamma^\varepsilon = e^{-\frac{c}{\varepsilon}}.$$

Problème discret

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{ij} \gamma_{ij} \log \left( \frac{\gamma_{ij}}{\theta_{ij}} \right) \quad (1)$$

( $\theta_{ij} = \exp(-\varepsilon^{-1} c_{ij})$ ). Unique solution de la forme  $\gamma_{ij} = \theta_{ij} a_i b_j$  où les  $a_i$  et  $b_j$  sont telles que les contraintes de marges sont satisfaites (problème de Schrödinger discret):

$$a_i = \frac{\mu_i}{\sum_j b_j \theta_{ij}} := R_i(b), \quad b_j = \frac{\nu_j}{\sum_i a_i \theta_{ij}} := S_j(a)$$

problème de point fixe sur  $a$ : trouver  $a$  dans le cône positif tel que  $a = Ta$  (avec  $T = R \circ S$ ). Algorithme de Sinkhorn: itérer  $T$ .

Calculs complètement parallélisables, seulement  $2I$  coefficients à stocker à chaque étape. Idée ancienne, efficacité pour le transport optimal, lien avec l'algorithme de matrix scaling de Sinkhorn plus récente: Marco Cuturi. Convergence, métrique projective de Hilbert:

$$d_H(a, a') := \log \left( \frac{\max_i \frac{a_i}{a'_i}}{\min_i \frac{a_i}{a'_i}} \right), \quad (a, a') \in (0, +\infty)^N.$$

pour laquelle  $T$  est une contraction.

Autre point de vue; projections alternées

$$\inf_{\gamma \in C_1 \cap C_2} \sum_{ij} \gamma_{ij} \log \left( \frac{\gamma_{ij}}{\theta_{ij}} \right) \quad (2)$$

avec

$$C_1 := \left\{ \gamma : \sum_j \gamma_{ij} = \mu_i, \forall i \right\}, \quad C_2 := \left\{ \gamma : \sum_i \gamma_{ij} = \nu_j, \forall j \right\}$$

Les projections de  $\theta$  pour KL sur  $C_1$  et  $C_2$  sont totalement explicites:

$$\text{proj}_{C_1}^{\text{KL}}(\theta)_{ij} = \frac{\theta_{ij} \mu_i}{\sum_l \theta_{il}}, \quad \text{proj}_{C_2}^{\text{KL}}(\theta)_{ij} = \frac{\theta_{ij} \nu_j}{\sum_l \theta_{lj}}$$

Sinkhorn revient à faire des projection alternées (IPFP, Iterative Proportional Fitting Procedure):

$$C_{2n+1} = C_1, C_{2n} = C_2, \gamma^n = \text{proj}_{C_n}^{\text{KL}}(\gamma^{n-1}).$$

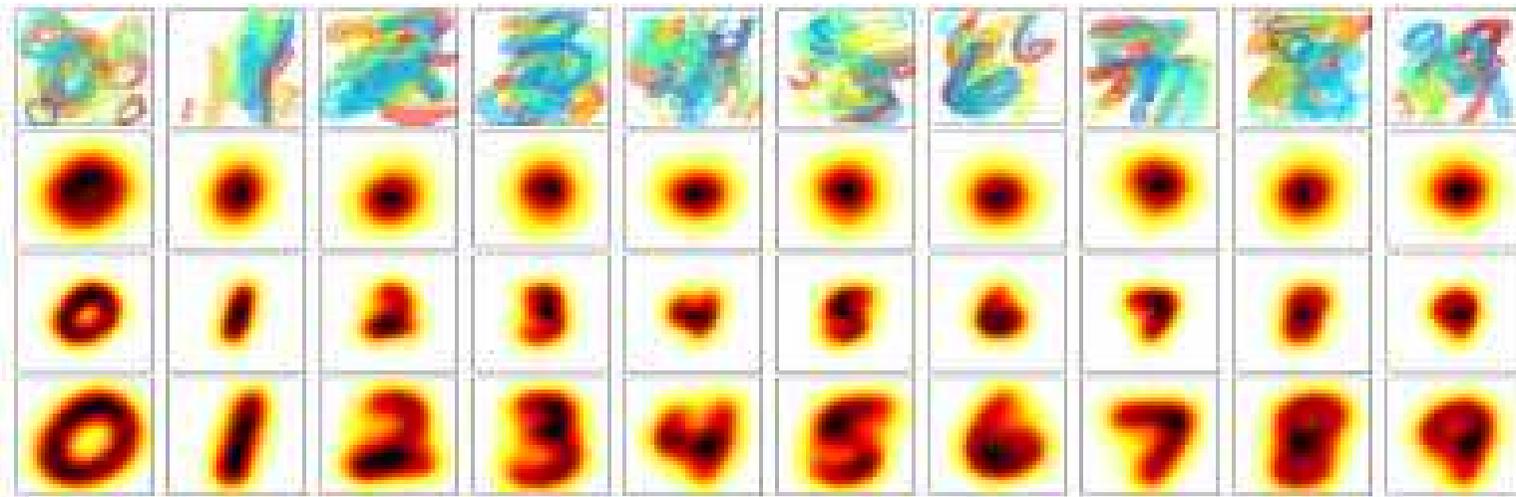
Méthodes des projections alternées s'adapte facilement aux problèmes multimarges, au transport partiel, aux barycentres au sens de  $W_2$  etc... cas de contraintes d'égalité: Dykstra, chaque projection est explicite dans chacun de ces exemples.

Barycentres pour  $W_2$ : étant données  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$  et des poids positifs,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , problème d'interpolation:

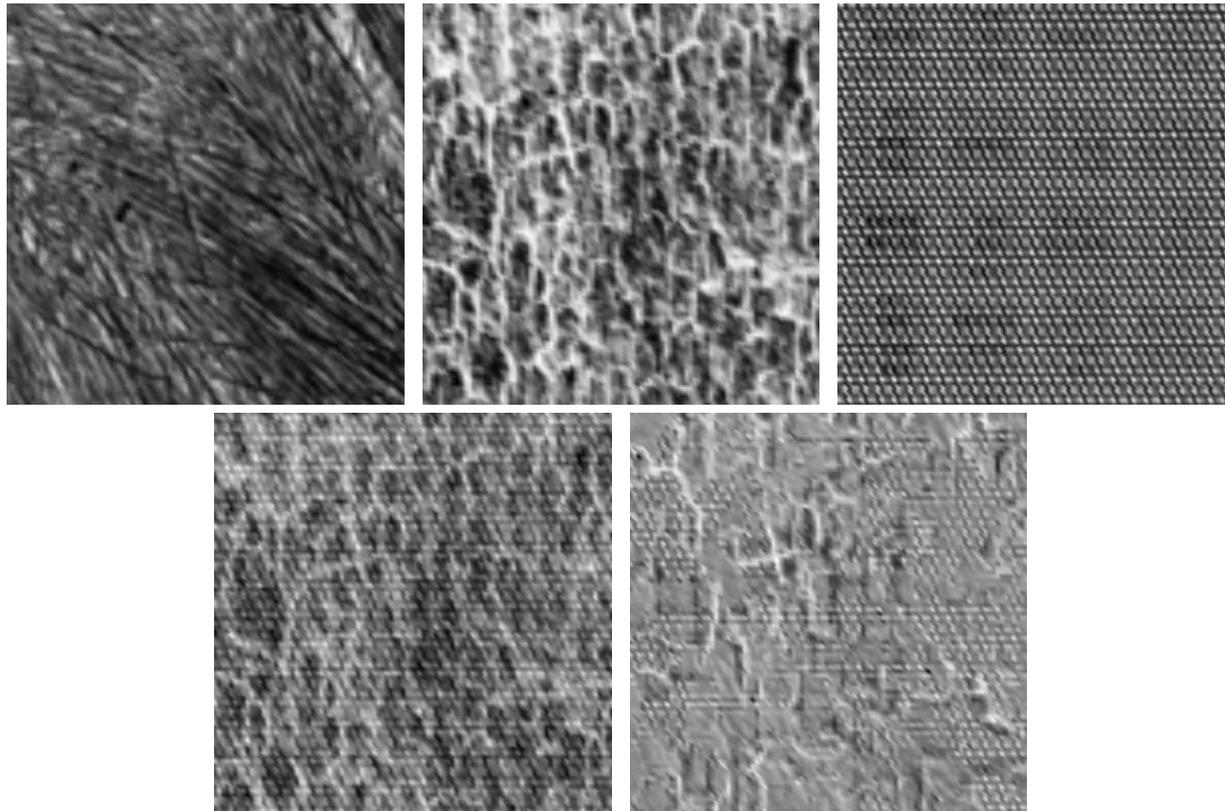
$$\inf_{\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \sum_{i=1}^k \lambda_i W_2^2(\nu, \nu_i). \quad (3)$$

une solution = un barycentre (pour  $W_2$ ) des mesures  $\nu_i$  avec les poids  $\lambda_i$ . Devenu assez populaire en traitement d'images, statistiques et machine learning.

Calcul de barycentres par Sinkhorn (Cuturi, Doucet):



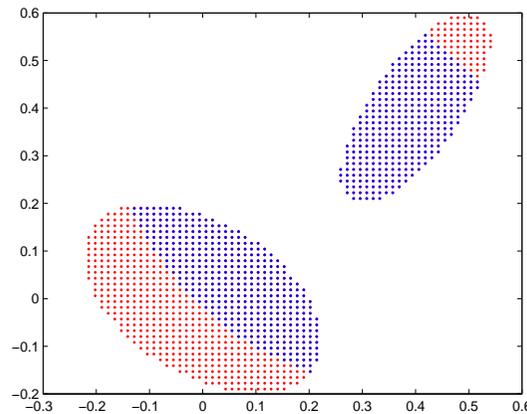
Synthèse de textures



Transport partiel, deux mesures positives,  $\mu$  et  $\nu$  (pas de même masse a priori),  $m \leq \min(\mu(X), \nu(Y))$  et l'on s'intéresse à

$$\inf_{\gamma \in \Pi_m^-(\mu, \nu)} \langle c, \gamma \rangle$$

$$\Pi_m^-(\mu, \nu) := \{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi_{1\#}\gamma \leq \mu, \pi_{2\#}\gamma \leq \nu, \gamma(X \times Y) = m\}.$$



Gabriel Peyré et ses coauteurs (Chizat, Schmitzer, Vialard...) ont développé des solveurs efficaces pour des problèmes entropisés plus généraux du type

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X_1 \times \dots \times X_L)} \left\{ \text{KL}(\gamma | \theta) + \sum_{i=1}^L F_i((\pi_i)_\# \gamma) \right\}$$

ce qui inclut le transport optimal multimarges, le transport non équilibré, la régularisation de JKO... et certains MFGs.

## Régularisation entropique des flots gradients

Schéma JKO pour l'EDP:

$$\partial_t \rho = \operatorname{div}(\rho \nabla E'(\rho)), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0.$$

On part de  $\rho_0$  et on construit par récurrence une suite de mesures de probabilité via

$$\rho^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \left\{ \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^k) + E(\rho) \right\}.$$

On pose  $\rho^\tau(t) = \rho^{k+1}$  pour  $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$ . Et on cherche à montrer que quand  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\rho^\tau$  converge vers une solution de l'EDP.

La difficulté dépend de  $E$ , pour fixer les idées prenons une énergie interne

$$E(\rho) := \int_{\mathbf{R}^d} U(\rho(x)) dx$$

avec  $U$  strictement convexe,  $U(0) = 0$ ,  $U \geq 0$  (pour simplifier)...

Ce qui correspond à l'équation de diffusion non linéaire:

$$\partial_t \rho = \Delta P(\rho), \quad P(\rho) := \rho U'(\rho) - U(\rho).$$

cas particulier:  $U(\rho) = \frac{1}{m-1} \rho^m$ ,  $m > 1$ , équation des milieux poreux

$$\partial_t \rho = \Delta \rho^m.$$

Equation d'Euler pour la  $k + 1$ -ème étape de JKO:

$$\frac{1}{\tau} (y - S^{k+1}(y)) \rho^{k+1}(y) = -\nabla U'(\rho^{k+1}(y)) \rho^{k+1} = -\nabla P(\rho^{k+1}(y)) \quad (4)$$

avec  $S_{\#}^{k+1} \rho^k = \rho^{k+1}$ , optimal et donc

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla P(\rho^\tau)| dx dt = \tau \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla P(\rho^{k+1})| \leq W_2(\rho^k, \rho^{k+1})$$

Evidemment, on a

$$W_2^2(\rho^{k+1}, \rho^k) \leq 2\tau \left( E(\rho^k) - E(\rho^{k+1}) \right).$$

De sorte que (avec  $N \simeq T/\tau$ )

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_2^2(\rho^{k+1}, \rho^k) \leq C\tau, \quad (5)$$

D'où une borne  $C^{0,1/2}$  en temps

$$W_2(\rho^\tau(t), \rho^\tau(s)) \leq C\sqrt{|t-s| + \tau}. \quad (6)$$

et une estimation  $L^1((0, T), BV)$  pour la pression

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla P(\rho^\tau)| dx dt \leq C(N\tau)^{1/2} \leq C_T. \quad (7)$$

Plus des bornes sur l'énergie et les moments d'ordre 2. Par un argument de type Aubin-Lions-Simon (cf. Rossi-Savaré pour le cas d'un module de continuité en temps donné par une distance plutôt qu'une estimation Sobolev en temps), convergence forte: la famille  $\{P(\rho^\tau)\}_\tau$  est relativement compacte dans  $L^1((0, T) \times \mathbf{R}^d)$ . Convergence forte de  $\rho^\tau$  et  $P(\rho^\tau)$ : limites  $\rho$  et  $P(\rho)$ .

Fonction-test  $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbf{R}^d)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \phi \rho^\tau &= - \sum_{k=0}^N \int_{\mathbf{R}^d} \phi(k\tau, \cdot) (\rho^{k+1} - \rho^k) \\
 &= - \sum_{k=0}^N \int_{\mathbf{R}^d} (\phi(k\tau, y) - \phi(k\tau, S^{k+1}(y))) \rho^{k+1}(y) dy \\
 &= - \sum_{k=0}^N \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \phi(k\tau, y) \cdot (y - S^{k+1}(y)) \rho^{k+1}(y) dy \\
 &\quad + O(\tau) \text{ (avec (6))}
 \end{aligned}$$

$$\text{(avec (4))} = - \sum_{k=0}^N \tau \int_{\mathbf{R}^d} \Delta \phi(k\tau, x) P(\rho^\tau(x)) dx + O(\tau).$$

Et donc en faisant  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\partial_t \rho = \Delta P(\rho)$ .

S'adapte sous des hypothèses convenables à des énergies plus générales:

$$\begin{aligned}
 E(\rho) := & \int_{\mathbf{R}^d} U(\rho(x))dx + \int_{\mathbf{R}^d} V(x)\rho(x)dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} W(x-y)\rho(x)\rho(y)dxdy
 \end{aligned} \tag{8}$$

dont le flot de gradient  $W_2$  s'écrit:

$$\partial_t \rho = \operatorname{div} \left( \rho(\nabla U'(\rho) + \nabla V + \nabla W \star \rho) \right).$$

Stabilité, unicité, contraction pour  $W_2$ , convergence vers l'équilibre: ok si  $E$  est convexe par déplacement i.e.  $t \mapsto E(\rho_t)$  est convexe le long des géodésiques ( $V$  est  $W$  convexe et  $U$  vérifie la condition de McCann). Terme d'interaction  $W$ : équations d'agrégation, milieux granulaires...

Quelques exemples plus compliqués.

**Mouvements de foules:** Maury, Roudneff-Chupin,  
Santambrogio

$$\partial_t \rho = \operatorname{div}(\rho(\nabla V + \nabla p)), \quad p \geq 0, \quad \rho \leq 1, \quad p(1 - \rho) = 0.$$

qui correspond à

$$E(\rho) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^d} V \rho & \text{si } \rho \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

**Modèles du quatrième ordre:** Jüngel, Toscani, Matthes, McCann, Savaré... Equation des films minces

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \left( \rho \nabla \Delta \rho \right) \text{ correspond à } E(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \rho|^2.$$

Equation de dérive-diffusion quantique de Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn:

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \left( \rho \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + V \right) \right)$$

qui correspond à

$$E(\rho) = \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \sqrt{\rho}|^2 + V \rho.$$

Peut-on utiliser le schéma JKO numériquement en pratique?

Résoudre:

$$\inf_{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \left\{ \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^k) + E(\rho) \right\}$$

pour un  $E$  "raisonnable". La difficulté est le terme de transport optimal  $W_2^2$ . Facile en dimension un, car la géométrie est simple:

$$W_2^2(\mu, \nu) = \int_0^1 (F_\mu^{-1}(s) - F_\nu^{-1}(s))^2 ds,$$

moins facile en dimension supérieure.

Nombreux développements ces dernières années, progrès récents avec des méthodes Lagrangiennes (Carrillo, Matthes, Benamou-C.-Oudet-Méridot) ou Euleriennes (Benamou-C.).

On va s'intéresser à la régularisation entropique proposée par G. Peyré:

$$\rho^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \left\{ \frac{1}{2} W_2^2(\rho, \rho^k) + \tau E(\rho) \right\} \quad (9)$$

approché par

$$\rho^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \left\{ \frac{1}{2} K_\varepsilon(\rho, \rho^k) + \tau E(\rho) \right\} \quad (10)$$

où  $\varepsilon > 0$  et

$$K_\varepsilon(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |x - y|^2 \gamma(x, y) dx dy \\ + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \gamma(x, y) \log(\gamma(x, y)) dx dy.$$

Deux petits paramètres  $\varepsilon$  et  $\tau$ , comment les relier pour avoir convergence? Prenons:

$$E(\rho) := \int_{\mathbf{R}^d} U(\rho(x))dx + \int_{\mathbf{R}^d} v(x)\rho(x)dx$$

avec (par exemple)  $U(\rho) = \rho \log(\rho)$  ou  $\rho^m$ ,  $m > 1$ ,  $v \geq 0$  et régulière et  $\rho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ ,  $E(\rho_0) < +\infty$ . Le flot de gradient de  $E$  correspond donc à

$$\partial_t \rho = \Delta P(\rho) + \operatorname{div}(\rho \nabla v), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (11)$$

avec

$$P(\rho) = \rho U'(\rho) - U(\rho).$$

Equation d'Euler-Lagrange de (10): semblable à la version non régularisée un terme en  $\frac{\varepsilon}{\tau} \Delta \rho^{k+1}$  en plus et surtout  $\gamma^{k+1}$  optimal pour  $K_\varepsilon(\rho^k, \rho^{k+1})$  et non plus  $W_2^2(\rho^k, \rho^{k+1})$ .

Convergence:

**Théorème 1** (*C., Duval, Peyré, Schmitzer*) *Le schéma (10) converge vers une solution de (11) quand  $\varepsilon, \tau \rightarrow 0$  dès que  $\varepsilon |\log(\varepsilon)| = O(\tau^2)$ .*

## Formulation dynamique

Est ce que la régularisation entropique est simplement une régularisation ou cela correspond-il à un problème pertinent en soi? C'est grâce à Christian Léonard qu'on sait que la réponse est positive. Soit  $\Omega := C([0, 1], \mathbf{R}^d)$  et  $R$  la "loi" d'un mouvement Brownien standard avec condition initiale distribuée uniformément sur  $\mathbf{R}^d$ , problème du pont de Schrödinger entre  $\rho_0$  et  $\rho_1$ :

$$S(\rho_0, \rho_1) := \inf \left\{ H(Q|R) : e_{0\#}Q = \rho_0, e_{1\#}Q = \rho_1 \right\}$$

avec

$$H(Q|R) := \int_{\Omega} \ln \left( \frac{dQ}{dR} \right) dQ$$

et  $e_t$  est l'évaluation au temps  $t$ ,  $e_t(\omega) = \omega(t)$ .

On désintègre  $Q$  et  $R$  par rapport à

$$Q_{0,1} := (e_0, e_1)_{\#} Q \in \Pi(\rho_0, \rho_1) \text{ et } R_{0,1} := (e_0, e_1)_{\#} R$$

$$(R_{0,1}(x, y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2}) := G_{0,1}(x-y)):$$

$Q = \int Q^{x,y} Q_{0,1}(dx, dy)$  et  $R = \int R^{x,y} R_{0,1}(dx, dy)$  ( $R^{x,y}$ : pont Brownien).

$$H(Q|R) = H(Q_{0,1}|R_{0,1}) + \int H(Q^{x,y}|R^{x,y}) Q_{0,1}(dx, dy)$$

de sorte que l'optimum consiste à prendre  $Q^{x,y} = R^{x,y}$  (dans Benamou-Brenier c'était la Dirac en la géodésique) et  $Q_{0,1}$  qui optimise le problème statique:

$$S(\rho_0, \rho_1) := \inf \left\{ H(Q_{0,1}|R_{0,1}), Q_{0,1} \in \Pi(\rho_0, \rho_1) \right\}.$$

La condition d'optimalité est

$$Q_{0,1}(x, y) = G_{0,1}(x - y) f_0(x) g_1(y)$$

et les conditions de marges fixées imposent que

$$(G_{0,1} \star g_1) f_0 = \rho_0, \quad (G_{0,1} \star f_0) g_1 = \rho_0 \quad (12)$$

qui n'est autre que le problème de Schrödinger statique vu précédemment. Si l'on dispose d'une telle paire de potentiels  $f_0, g_1$  on pose  $f_1 := G_{0,1} \star f_0$ ,  $g_0 := G_{0,1} \star g_1$  de sorte que  $\rho_0 = f_0 g_0$ ,  $\rho_1 = f_1 g_1$ . Interpolation:  $\rho_t := f_t g_t$  où

$$\partial_t f = \frac{1}{2} \Delta f, \quad f|_{t=0} = f_0, \quad \partial_t g = -\frac{1}{2} \Delta g, \quad g|_{t=1} = g_1. \quad (13)$$

On a alors que cette interpolation  $\rho$  est solution de l'équation de Fokker-Planck avec drift  $\nabla\varphi$  où  $\varphi = \log g$  (c'est Hopf-Cole...):

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \nabla \varphi) - \frac{1}{2} \Delta \rho = 0, \quad (14)$$

tandis que  $\varphi$  est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman retrograde

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \Delta \varphi = 0 \quad (15)$$

Noter qu'il y a deux conditions limites sur  $\rho$  et aucune sur  $\varphi$  (comme en contrôle optimal). Analogie avec diffusion de Benamou-Brenier.

Au moins formellement le couple  $(\rho, \nabla\varphi)$  est optimal pour le problème de contrôle

$$\text{FP}(\rho_0, \rho_1) := \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |v_t(x)|^2 \mu_t(x) dx dt \right\},$$

sous les contraintes

$$\partial_t \mu + \text{div}(\mu v) - \frac{1}{2} \Delta \mu = 0, \quad \mu_{t=0,1} = \rho_0, \rho_1$$

On a aussi

$$S(\rho_0, \rho_1) = \text{FP}(\rho_0, \rho_1) + \int_{\mathbf{R}^d} \rho_0 \ln(\rho_0).$$

La solution de  $S(\rho_0, \rho_1)$  est Markovienne c'est la loi de  $X$ :

$$dX_t = \nabla \varphi_t(X_t) dt + dW_t, \quad X_0 \simeq X_0.$$

Une question cruciale est l'existence des potentiels de Schrödinger  $f_0$  et  $g_1$ .

Références : Léonard 2012, 2014, Gentil, Léonard, Ripani 2016, Mikami 1991, Zambrini 1986, Jamison 1975.

## Jeux à champ moyen par minimisation d'entropie

Les jeux à champ moyen ont été introduits par Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions en 2006 et traduisent la structure des équilibres de Nash dans des jeux différentiels stochastiques avec un continuum de joueurs indistinguables. Un cas simple, chaque joueur cherche à minimiser:

$$\mathbf{E} \left( \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} |\alpha_s|^2 + f(\rho_s(X_s)) \right] ds + g(\rho_1(X_1)) \right),$$

avec

$$X_0 = x, \quad dX_s = \alpha_s ds + dW_s,$$

et  $\rho_s$  représente la densité de l'ensemble des joueur,  $\rho_0$  donnée.

Equilibre: les agents, résolvent leur problème individuel de contrôle optimal, HJB, en prenant  $\rho$  comme donnée (prior), cela induit un feedback optimal  $\alpha = \nabla\varphi$  ( $\varphi$ =-la fonction valeur). Ce drift gouverne l'évolution de la densité des joueurs, Fokker-Planck ce qui donne lieu à une nouvelle distribution des joueurs (posterior). L'équilibre est la situation où le posterior coïncide avec le prior.

Force de l'approche: ramène l'équilibre à un système d'EDPs (qui a un air de famille avec ce que nous avons vu avant...).

Système MFG:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \Delta \varphi = -f(\rho), & \varphi|_{t=1} = -g(\rho_1) \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \nabla \varphi) - \frac{1}{2} \Delta \rho = 0, & \rho|_{t=0} = \rho_0. \end{cases}$$

Ce système est la condition d'optimalité pour le problème consistant à minimiser

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \left[ \frac{1}{2} |v_s(x)|^2 \rho_s(x) + F(\rho_s(x)) \right] dx ds + \int_{\mathbf{R}^d} G(\rho_1(x)) dx$$

avec  $F' = f$ ,  $G' = g$  (convexes quand  $f$  et  $g$  croissantes: congestion) sous la contrainte

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) - \frac{1}{2} \Delta \rho = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0.$$

Point de vue entropique: modifier le problème de Schrödinger en ajoutant un coût sur les marges en temps. Idée fructueuse pour traduire l'incompressibilité dans Navier Stokes: Yasue, Zambrini, Arnaudon, Cruzeiro, Léonard. Pour les MFG, cela donne:

$$\inf_{Q : e_0 \# Q = \rho_0} H(Q|R) + \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} F(e_s \# Q) ds + \int_{\mathbf{R}^d} G(e_1 \# Q)$$

qui est une reformulation équivalente du problème de départ. Intérêt: Sinkhornisation de la discrétisation en temps: calculs numériques rapides (en cours avec J.-D. Benamou, L. Nenna et S. Di Marino).

**Bon anniversaire Patrick et Christian!!!!**