Intégrabilité des géodésiques stochastiques sur la sphère

Festival Cattiaux-Léonard, Toulouse 8/6/2017

Jean-Claude Zambrini
Grupo de Física-Matemática , Univ. Lisboa (GFMUL)

0. Introduction

Version stochastique du problème intégrable des géodésiques sur S^2 ?

1. Le problème classique

$M = S^2$

$$(q^i) = (\theta, \phi) \in [0, \pi[\times[0, 2\pi]$$

$$ds^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2 \equiv g_{ij}dq^i dq^j$$

Lagrangien

$$L(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \phi) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2) \equiv \frac{1}{2}\dot{q}^i g_{ij}\dot{q}^j$$

$S[q(\cdot)] = \int_P^Q L\, d\tau$

$$\tau \in [t,u], \quad S[q(\cdot)] = \int_{P=(t,q)}^{u} L(\dot{q}(\tau), q(\tau))\, d\tau + S_u(q_u)$$

Bolza

$$\text{(EL)} : \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad\qquad \text{et}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(u) = -\nabla S_u(q(u))$

$\dot{q}$ comme contrôle

$S_L(q,t) = \inf_{\dot{q}} S[q(\cdot)]$ le long d' extrémales :

$$t < u \quad \text{(HJ)} : -\frac{\partial S_L}{\partial t} + h(q, -\nabla S_L) = 0 \quad , \quad S_L(q,u) = S_u(q)$$

$h =$ Hamiltonian , $h(q,p)$ transformée de Legendre de $L = L(\dot{q})$

A un système Hamiltonian $\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}$ sont associées deux HJ :

$$t > s \quad (\mathrm{HJ})^* : +\frac{\partial S_L^*}{\partial t} + h(q, \nabla S_L^*) = 0 \quad , \quad S_L^*(q, s) = S_s^*(q)$$

$$p_*(q(t), t) = \left.\frac{\partial S_L^*}{\partial q}(q_1, t_1, q, t)\right|_{q=q(t)} = -\left.\frac{\partial S_L}{\partial q}(q, t, q_2, t_2)\right|_{q=q(t)} = p(q(t), t)$$

$S_L^*(q, t) = \inf_{\dot{q}} S^*[q(\cdot)] = S_s^*(q_s) + \int_s^{Q=(t,q)} \hat{L}(\dot{q}(\tau), q(\tau)) d\tau$

Deux actions renversées dans le temps sur $[s, u]$.

Euler-Lagrange en $(q^i) = (\theta, \phi)$:

$$\ddot{\theta} = (\dot{\phi})^2 \sin\theta\cos\theta,\ \ddot{\phi} = -2\dot{\theta}\dot{\phi}\ \text{cotg}\ \theta,\ \ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \dot{\theta},\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}\ \sin^2\theta$$

Hamiltonian $\quad h(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2}(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2) = \frac{1}{2}p_i g^{ij} p_j$

Mvt. périodique intégrable. Nb constantes du mvt $=$ dim. espace de config. $= 2$

Energie h , $\quad$ impulsion p_ϕ

Foliation de $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$

2. **Déformation stochastique**

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_{LB} = -\frac{g^{ij}}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(q) g^{jk}\frac{\partial}{\partial q^i}$$

Sur S^2 , $\Gamma^{\theta}_{jk}\, g^{jk} = -\mathrm{cotg}\,\theta$, $\Gamma^{\phi}_{jk} g^{jk} = 0$

$z = (\theta, \phi)$

$$dz^i = (B^i - \frac{\hbar}{2}\Gamma^i_{jk} g^{jk})d\tau + dw^i(\tau)$$

$\hbar > 0$, $B^i = \text{contrôle}$, $dw^i = \hbar^{\frac{1}{2}}\sigma^i_k d\beta^k$, $g^{ij} = \sigma^i_k \sigma^j_k$, $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \end{bmatrix}$,

$\beta = \text{Brownien 2 dim.}$

$S_L(q,t) = -\hbar\, \ln \eta(q,t)$, $S_L(q,u) = S_u(q)$ où

$\hbar^{-1}\frac{\partial \eta}{\partial t} = H\eta$, $s \le t \le u$, $\eta(q,u) = \eta_u(q) > 0$

Contrôle optimal stochastique :

$$S_L(q,t) = \inf_B E_{qt}\{\frac{1}{2}\int_t^u B^i B_i(z(\tau),\tau)d\tau \ + \ S_u(z(u))\}$$

Régularisation de $\dot{z}^i$ et de l'Action classique

$$B^i(z(\tau),\tau) = \lim_{\Delta\tau\downarrow 0} \ E_\tau\Big[\frac{z^i(\tau+\Delta\tau)-z^i(\tau)}{\Delta\tau}\Big] \equiv D_\tau z^i \quad (D \text{ gén. de } \ z(\cdot))$$

Drift géodésique : $B_i(q,t) = \hbar\frac{\partial_i \eta}{\eta}(q,t) = -\partial_i S_L(q,t)$

$$L = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial_\theta\eta}{\eta}\Big)^2_{\searrow \dot{\theta}} + \sin^2\Big(\frac{\partial_\phi\eta}{\eta}\Big)^2_{\searrow \dot{\phi}}\Big]$$

Regul. du L classique

Déformation stochastique de HJ

$$-\frac{\partial S_L}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla S_L\|^2 - \frac{\hbar}{2}\nabla^i\nabla_i S_L = 0 \quad , \quad S_L(q,u) = S_u(q) \qquad \text{(HJB)}$$

Transport parallèle de (B^i) ; $\forall V$ champs de vecteurs sur S^2 ,

$$D_t V^i = \frac{\partial V^i}{\partial t} + B^k \nabla_k V^i + \frac{\hbar}{2}\Delta_{DR} V^i \quad , \Delta_{DR} V^i = \nabla^k \nabla_k V^i + R^i_k V^k$$

$R =$ Ricci , $DR =$ De Rahm

$z(t) = (\theta(t), \phi(t))$ géodésique satisfait

$D_t D_t z^i = 0$ (EL) Pour $\hbar = 0$, géodésiques classiques.

z_t construit via sol. positive η de l'eq. de la chaleur :

$$d\theta(t) = (\hbar\frac{\partial_\theta \eta}{\eta} + \hbar\frac{\mathrm{cotg}\theta}{2})dt + dw^\theta(t)\ , \quad d\phi(t) = \frac{1}{\sin^2\theta}(\hbar\frac{\partial_\phi \eta}{\eta})dt + dw^\phi(t)$$

<u>Déf:</u> $h = \partial_t S_L = \frac{1}{2} B_i g^{ij} B_j + \frac{\hbar}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} B_j - \frac{\hbar}{2} \Gamma^i_{jk} g^{jk} B_i$ Energie

$p_\phi = \sin^2\theta\ B_\phi$ Impulsion $(p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}})$

Observ. : $D_t h(z_t, t) = 0$, $D_t p_\phi(z_t, t) = 0$ martingales

Pour $\hbar = 0$, constantes du mouvement géodésique classique

Accidentel ?

“Intégrables" ?

3. Déformation stochastique du Théorème classique d'intégrabilité de Jacobi

Euclidien , HJB générale (V scalaire , borné dessous)

$$-\frac{\partial S_L}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla S_L\|^2 - \frac{\hbar}{2}\Delta S_L - V = 0\,,\quad s < t < u\,,\quad S_L(q,u) = S_u(q)$$

Solution "complète" de HJB , $q \in M = \mathbb{R}^n$

$S(q,t,\alpha) \equiv S_\alpha(q,t)$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$ ($n =$ dim. de l'espace de configuration)

$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \alpha^k}\right) \neq 0$, $S_\alpha(q,t)$ résout HJB $\forall \alpha$.

Théorème (C. Léonard, JCZ) Déformation stochastique du Théorème d'intégration de Jacobi

Pour résoudre les équations de EL stochastiques de la diffusion z critique

$$J[z(\cdot)] = E_{qt} \int_t^u (\{\frac{1}{2}\|D_\tau z\|^2 + V(z_\tau)) d\tau + S_u(z_u)\}$$

connaissant une solution complète $S_\alpha(q,t)$ de HJB associée,

a) Résoudre n eqs. implicites $\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha^i}(q,t) = M_t^i$ par $q = Q^\alpha(t, M)$

b) A Q^α adjoindre $P^\alpha(t, M) = -\nabla S_\alpha(Q^\alpha(t, M), t)$

Alors Q_t^α est solution de EL et P_t^α son impulsion associée.

Idée de preuve :

Générateurs $\hat{N}$ de symétries de $\hbar\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\eta + V\eta \equiv \hat{H}\eta \quad (*)$

$\hat{N} = X^i\frac{\partial}{\partial q^i} + T\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\hbar}\phi$

z_τ extremal of J, $D_\tau z = \hbar\nabla\ln\eta(z_\tau,\tau)$

$\eta_\alpha = e^{\frac{\alpha}{\hbar}\hat{N}}\eta =$ famille param. de solutions de $(*)$ $\quad \rightarrow z_t^\alpha$

$\rightarrow S_\alpha(q,t) = -\hbar\ln\eta_\alpha(q,t) =$ Sol. complète de HJB.

Chaque $\hat{N} \rightarrow$ martingale $M_t = \frac{\partial S_\alpha}{\partial\alpha}(z_t^\alpha)$

Pour S^2 , $z = (\theta,\phi)$, $\exists$ 4 symétries non triviales, donc martingales (en particulier h et p_ϕ). L'observation $D_t h = D_t p_\phi = 0$ n'était pas accidentelle pour les géodésiques)

$\rightarrow$ Système "intégrable".

NB : Pour V polynôme au plus quadratique , dim. groupe de symétries $\bar{m}$ que pour $V = 0$, $\quad \frac{n}{2}(n+3)+4 > n$ martingales $\rightarrow$ Intégrable.
Général V ds $\hat{H}$, système non intégrable.

4. Processus géodésiques comme problème de Schrödinger

Une seule HJB jusqu' ici !

$$J^*[z(\cdot)] = E_{qt}\left\{\int_s^t \left(\frac{1}{2}\|D_\tau \hat{z}\|^2 + V(\hat{z}_\tau)\right)d\tau + S_s^*(z_s)\right\}$$

$\hat{z}(\tau) = z(u+s-\tau)$, renversé sur $[s,u]$
$S_L^*(q,t) = \inf_{B^*} J^*[z(\cdot)],\ B^* = \nabla S_L^*$

Problème de Cauchy adjoint :

$$\frac{\partial S_L^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla S_L^*\|^2 - \frac{\hbar}{2}\Delta S_L^* - V = 0\ ,\quad t \geq s\ ,\quad S_L^*(q,s) = S_s^*(q)$$

linearisé par $S_L^*(q,t) = -\hbar \ln \eta^*(q,t)$

$-\hbar\frac{\partial \eta^*}{\partial t} = \hat{H}\eta^*\quad ,\quad \eta^*(q,s) = \eta_s^*(q) > 0$

z_t “réciproques de Bernstein" $\forall r \leq s < t < u \leq v$

$E[f(z_t)|\mathcal{P}_s \cup \mathcal{F}_u] = E[f(z_t)|z_s, z_u]$

Markoviens de distribution jointe

$$M_m(A_s \times A_u) = \int_{A_s \times A_u} \eta_s^*(x)\Big(\exp\, -\frac{1}{\hbar}(u-t)\hat{H}\Big)(x,z)\eta_u(z)\; dxdz$$

les 2 marginales , pour données $\rho_s(dx)$ et $\rho_u(dz)$: “Système de Schrödinger"

Beurling $\Longrightarrow \exists!$ sol. (η_s^*, η_u) du système , i.e. $\exists!$ $z_t, t \in [s,u]$

Tous les résultats présentés, y compris le Th. stochastique de Jacobi , se réduisent aux énoncés et conclusions des Théorèmes classiques quand $\hbar = 0$.

La partie géométrique est l'objet d'un travail avec M. Arnaudon et celle concernant l'intégrabilité est une collaboration avec C. Léonard.