Un modèle stochastique de Cucker-Smale et quelques variantes

Laure Pédèches

basé sur des travaux réalisés avec
Patrick Cattiaux (IMT) et Sylvie Roelly (Potsdam)

En l'honneur de P. Cattiaux et C. Léonard

Toulouse, 8 juin 2017

Des oiseaux.

Mouvements collectifs de population, sans structure hiérarchique

Quelques exemples :

- vols d'oiseaux, ou nuées d'insectes
- bancs de poissons, de dauphins
- populations de bactéries
- troupeaux de bétails (essayant d'échapper à un prédateur)
- humains (vis-à-vis d'un point d'attraction ou de répulsion)

Mouvements collectifs de population, sans structure hiérarchique

Quelques exemples :

- vols d'oiseaux, ou nuées d'insectes
- bancs de poissons, de dauphins
- populations de bactéries
- troupeaux de bétails (essayant d'échapper à un prédateur)
- humains (vis-à-vis d'un point d'attraction ou de répulsion)

Comment peut-on expliquer ces phénomènes ?

- sécurité renforcée (dissuasion + anonymat)
- alimentation plus simple (efficacité accrue pour trouver et exploiter les ressources)
- reproduction plus aisée
- déplacements moins coûteux (meilleur aéro- ou hydrodynamisme)

Flocking : phénomène au cours duquel un grand nombre d'individus, ou de particules, atteint un consensus en l'absence de structure hiérarchique ou de direction centralisée.

Quelques occurrences de *flocking*

Flocking : phénomène au cours duquel un grand nombre d'individus, ou de particules, atteint un consensus en l'absence de structure hiérarchique ou de direction centralisée.

Mécanismes de type *flocking* utilisés pour modéliser :

- Mouvements collectifs d'une population (groupes d'animaux en transit, agrégations de bactéries, etc [par ex. Breder '54 ; Keller, Segel, 1970 ; Heppner, Grenander '90]).
- Emergence d'un nouveau langage dans les sociétés primitives [Cucker, Smale, Zhou '04].
- Mécanismes de contrôles et algorithmes de consensus pour des systèmes d'agents autonomes (satellites, capteurs mobiles, robots [Suzuki, Yamashita '09]).
- Confiance dans un système financier (par ex., la structure de corrélation du ratio de solvabilité est modélisée par des dynamiques de flocking, étant donné que les entreprises s'influencent mutuellement [Ha, Kim, Lee '15]).

Flocking : une vue mathématique

Phénomène qui voit un groupe d'"agents" autopropulsés s'organiser pour former un ensemble ayant un mouvement globalement cohérent.

D'un point de vue mathématique : flocking si en temps long il y a

(i) *alignement des vitesses*

(ii) *stabilité de la structure de groupe*.

On considère N particules dans $\mathbb{R}^d$. La position (resp. vitesse) de la $i$ème particule au temps t est notée $x_i(t)$ (resp. $v_i(t)$).

Le centre de masse est donné par : $x_c(t) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j(t)$ (resp. $v_c(t) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j(t)$).

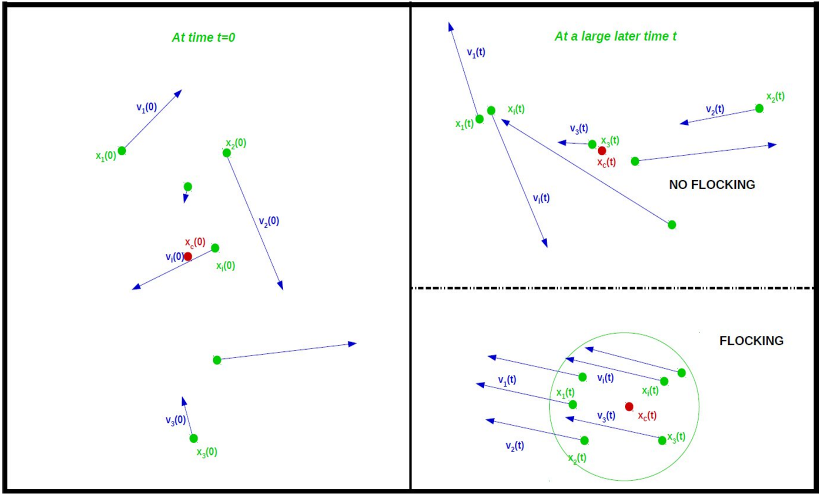
Definition

Il y a **flocking** pour un ensemble de N particules si

(i) Pour tout $i \in \{1,\dots N\}$, $\lim_{t\to\infty} |v_i(t) - v_c(t)|^2 = 0$;

(ii) Pour tout $i \in \{1,\dots N\}$, $\sup_{0\leqslant t<\infty} \left|x_i(t) - x_c(t)\right|^2 < \infty$.

Flocking : une vue mathématique



Le modèle de Cucker-Smale

Sur $\mathbb{R}^d$, pour tout $i \in \{1,\ldots N\}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_i'(t) & = & v_i(t) \\ v_i'(t) & = & -\dfrac{\lambda}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \psi(x_i(t), x_j(t))(v_i(t) - v_j(t)) \end{array} \right.$$

où λ est un réel strictement postif et ψ une fonction positive et symétrique appelée *taux de communication*.

Theorem (F. Cucker, S. Smale '06)

Pour un taux de communication défini par $\psi(x,y) = \dfrac{1}{(1+|x-y|^2)^\gamma}$, *il y a toujours flocking si* $\gamma < 0{,}5$; *dans le cas contraire, il y a flocking si les données initiales satisfont une certaine condition.*

+ *Cas* $\gamma = 0{,}5$ *(Ha, Tadmor '08).*

Le modèle de Cucker-Smale

Pour tout $i \in \{1, \dots N\}$

$$\begin{cases} x_i'(t) & = & v_i(t) \\ v_i'(t) & = & -\dfrac{\lambda}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \psi(x_j(t), x_i(t))(v_i(t) - v_j(t)) \end{cases}$$

où λ est un réel strictement postif et ψ une fonction positive et symétrique appelée *taux de communication*.

- Un individu est influencé par tous les autres, pas seulement ses plus proches voisins [en désaccord avec Ballerini et al. '08].
- Le taux de communication est d'autant plus important que les particules sont proches. D'autres alternatives peuvent être défendues.
- Seule une interaction **déterministe** est prise en compte, à travers ψ. Qu'en est-il de l'impact **aléatoire** de l'environnement (vent, courant) ? Ou du libre-arbitre de chaque individu ?

Une version stochastique du modèle de Cucker-Smale

En 2009, Ha, Lee et Levy ont proposé le modèle ci-dessous : pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\begin{cases} dx_i(t) &= v_i(t)\,dt \\ dv_i(t) &= -\dfrac{\lambda}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \psi(x_i(t), x_j(t))(v_i(t) - v_j(t))\,dt + \sqrt{D}\,dW_i(t) \end{cases}$$

avec D un nombre positif représentant l'intensité du bruit et $W_1, \ldots W_N$ des mouvements browniens standards indépendants d-dimensionnels.

La perturbation aléatoire introduite est indépendante pour chaque particule, avec un coefficient de diffusion constant. On peut la voir comme une modélisation du degré de liberté, ou de folie, de chaque individu...

Que cherche-t-on à étudier ?

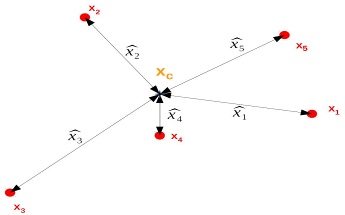
- comportement asymptotique en temps long (ergodicité, TCL, etc)
- propriétés de type propagation du chaos

Systèmes macroscopique et microscopique

Pour ce faire, on coupe le système en deux, pour étudier la dynamique à deux échelles différentes :

- un système **macroscopique** représenté par les centres de masse x_c et v_c :

$$x_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ and } v_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i.$$



- un système **microscopique** donné par les fluctuations relatives des positions et des vitesses autour de x_c et v_c : pour tout $i \in \{1, ..., N\}$,

$$\hat{x}_i = x_i - x_c \text{ et } \hat{v}_i = v_i - v_c.$$

Le comportement macroscopique

Remarquons que $\sum_{i=1}^{N} v_i = N\, v_c$, autrement dit $\sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i = 0$ (et idem pour les x_i).

Quel que soit le taux (symétrique) de communication, la vitesse et la position moyennes satisfont

$$\begin{cases} x_c(t) & = & x_c(0) + t\, v_c(0) + \sqrt{D} \displaystyle\int_0^t W_c(s)\, ds \\ v_c(t) & = & v_c(0) + \sqrt{D}\, W_c(t) \end{cases}$$

où $W_c(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i(t)$ suit une dynamique gaussienne, de matrice de covariance $\frac{D}{N} I_d$.

Pas d'expression explicite pour la cruciale partie microscopique dans le cas général.

Quand le taux de communication ψ vaut 1...

... ce qui est une aberration d'un point de vue biologique...

... le système global se réécrit

$$\begin{cases} dx_i(t) &= v_i(t)\,dt \\ dv_i(t) &= -\lambda\,(v_i(t)-v_c(t))\,dt+\sqrt{D}\,dW_i(t). \end{cases}$$

En notant $\widehat{W}_i = W_i - W_c$, la partie microscopique satisfait

$$\begin{cases} d\hat{x}_i(t) &= \hat{v}_i(t)\,dt \\ d\hat{v}_i(t) &= -\lambda\hat{v}_i(t)\,dt+\sqrt{D}\,d\widehat{W}_i(t). \end{cases}$$

Il s'agit d'un processus de type Ornstein-Uhlenbeck, dont on peut donner une expression explicite :

$$\hat{v}_i(t) = e^{-\lambda t}\,\hat{v}_i(0)+\sqrt{D}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\,d\widehat{W}_i(s)$$

La dynamique microscopique pour un taux de communication constant

On définit une matrice de covariance K_N de taille $dN \times dN$ par

$$K_N = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{N})Id & -\frac{1}{N}Id & \cdots & -\frac{1}{N}Id \\ -\frac{1}{N}Id & (1-\frac{1}{N})Id & \cdots & -\frac{1}{N}Id \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N}Id & -\frac{1}{N}Id & \cdots & (1-\frac{1}{N})Id \end{pmatrix}$$

et on pose $\hat{v}_t = (\hat{v}_1(t), ..., \hat{v}_N(t))$.

$$\hat{v}_t \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda t}\mathbb{E}[\hat{v}_0], (1-e^{-2\lambda t})\frac{D}{2\lambda}K_N\right)$$

$\hat{v}_t$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{D}{2\lambda}K_N)$ à vitesse exponentielle quand $t \to \infty$.

Comportement en temps long pour un taux de communication constant

- Système microscopique $(\hat{x}, \hat{v})$:
  - Comportement des fluctuations relatives : le couple $(\hat{x}, \hat{v})$ admet $d\hat{x} \otimes \mathcal{N}\left(0, \frac{D}{2\lambda} K_N\right)$ comme mesure invariante sur $\mathbb{R}^{dN} \times \mathbb{R}^{dN}$.
    Il n'y a donc **pas de probabilité invariante**.
  - Comportement des vitesses relatives : $\hat{x}$ satisfait le théorème central limite (Cattiaux-Chafaï-Guillin, '12) :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \hat{x}_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{\lambda} K_N\right).$$

    Ainsi, $\hat{x}$ diverge avec vitesse $\sqrt{t}$.
- Système global $(x(t), v(t))$:
  - Le vecteur des vitesses $v(t)$ admet

$$\mu(dv) = \exp\left(-\frac{\lambda}{D}\Phi(v)\right) dv_1 \dots dv_N \quad \text{avec } \Phi(v) := \sum_{i=1}^{N} \|v_i - v_c\|^2$$

    comme mesure invariante, mais **pas de probabilité invariante**.
- Peut-on légèrement modifier ce modèle pour obtenir un système dont les vitesses convergent vers un équilibre ?

1. Dans le monde déterministe : flocking et le modèle de Cucker-Smale
   - Une définition mathématique du flocking
   - Le modèle (déterministe) de Cucker-Smale
2. Vers un univers aléatoire : variations et évolutions autour d'un modèle stochastique de Cucker-Smale
   - Le modèle de Ha, Lee et Levy
   - Avec un taux de communication constant
   - En rajoutant une force de rappel
   - Avec deux particules et le taux de communication de Cucker et Smale
   - Perturbation du cas constant et développement en amas
3. Chaoticité et propagation du chaos

Ajout d'une force de rappel

Toujours pour $\psi = 1$, on ajoute un terme d'attraction vers le centre de masse des positions dans l'équation des vitesses : pour tout $i \in \{1, \dots N\}$,

$$\begin{cases} dx_i(t) & = & v_i(t)\, dt \\ dv_i(t) & = & -\lambda\,(v_i(t) - v_c(t))\, dt - \beta(x_i(t) - x_c(t))\, dt + \sqrt{D}\, dW_i(t) \end{cases}$$

avec β un réel positif, représentant l'intensité de cette nouvelle interaction.

Ajout d'une force de rappel

Toujours pour $\psi = 1$, on ajoute un terme d'attraction vers le centre de masse des positions dans l'équation des vitesses : pour tout $i \in \{1, \dots N\}$,

$$\begin{cases} dx_i(t) &= v_i(t)\,dt \\ dv_i(t) &= -\lambda\,(v_i(t) - v_c(t))\,dt - \beta(x_i(t) - x_c(t))\,dt + \sqrt{D}\,dW_i(t) \end{cases}$$

avec β un réel positif, représentant l'intensité de cette nouvelle interaction.

La partie macroscopique reste inchangée ; en revanche, la partie microscopique devient, pour tout $i \in \{1, \dots N\}$,

$$\begin{cases} d\hat{x}_i(t) &= \hat{v}_i(t)\,dt \\ d\hat{v}_i(t) &= -\lambda\,\hat{v}_i(t)\,dt - \beta\hat{x}_i(t)\,dt + \sqrt{D}\,d\widehat{W}_i(t). \end{cases}$$

On ne peut plus donner une expression explicite de la solution ; cependant le système va se stabiliser autour de la probabilité invariante.

Probabilité invariante et stabilisation

On introduit sur $(\mathbb{R}^d)^{N-1}$ l'énergie

$$\Psi(z_1,\cdots,z_{N-1}) := \sum_{i=1}^{N-1} \|z_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^{N-1} z_i\|^2.$$

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan $\mathcal{H} = \{(\hat{x},\hat{v}) \in \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}^{Nd} \mid \hat{x}_1 + .. + \hat{x}_N = 0, \hat{v}_1 + .. + \hat{v}_N = 0\}$.

Théorème (Ergodicité exponentielle)

La **probabilité** $\hat{\mu}$ sur $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^{N-1}$ de densité

$$\frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{\lambda}{D}\left(\beta\Psi(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_{N-1}) + \Psi(\hat{v}_1,\cdots,\hat{v}_{N-1})\right)\right)$$

est invariante pour le système microscopique projeté sur $\mathcal{H}$.

En outre, si $\lambda^2 \geqslant 2\beta$, il y a une **stabilisation exponentielle** vers $\hat{\mu}$ pour la norme en variation totale.

Preuve : fonction de Lyapunov et technique de Down-Meyn-Tweedie

Definition

Une fonction strictement positive V est une fonction de Lyapunov pour le système associé avec le générateur infinitésimal L s'il existe un réel positif k tel que, en dehors d'un compact, $LV \leqslant -kV$.

Theorem : [Down-Meyn-Tweedie ('95)]

Si V est une fonction de Lyapunov associée au générateur L sur $B(0,R)^c$, bornée sur $B(0,R)$, et si, de plus, le processus est irréductible, alors – en notant (P_t) le semi-groupe associé et μ la probabilité invariante – pour tous x, v, $P_t((x,v),.)$ converge à vitesse exponentielle vers μ pour la norme en variation totale. Autrement dit, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout t suffisamment grand :

$$\|P_t((x,v),.) - \mu\|_{TV} \leqslant CV(x,v)e^{-\rho t}$$

Preuve : fonction de Lyapunov et technique de Down-Meyn-Tweedie

Notre résultat :

Si $\lambda^2 \geqslant 2\beta$, alors $V : (x,v) \mapsto exp\left(\frac{1}{2D}(\sum_i (\beta\lambda \|x_i\|^2 + 2\beta x_i.v_i + \lambda \|v_i\|^2))\right)$ est une fonction de Lyapunov pour le système microscopique de générateur

$$Lf(x,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha}\left(\partial^2_{v_i^\alpha} f(x,v) - \frac{1}{N}\sum_j \partial^2_{v_i^\alpha v_j^\alpha} f(x,v)\right) + \sum_{i,\alpha} v_i^\alpha\, \partial_{x_i^\alpha} f(x,v) - \sum_{i,\alpha}(\lambda v_i^\alpha + \beta x_i^\alpha)\, \partial_{v_i^\alpha} f(x,v)$$

associée à la constante $k = \min((\lambda^2 - 2\beta), \beta^2)$.

1. Dans le monde déterministe : flocking et le modèle de Cucker-Smale
   - Une définition mathématique du flocking
   - Le modèle (déterministe) de Cucker-Smale
2. Vers un univers aléatoire : variations et évolutions autour d'un modèle stochastique de Cucker-Smale
   - Le modèle de Ha, Lee et Levy
   - Avec un taux de communication constant
   - En rajoutant une force de rappel
   - Avec deux particules et le taux de communication de Cucker et Smale
   - Perturbation du cas constant et développement en amas
3. Chaoticité et propagation du chaos

En dimension 1, avec 2 particules et le taux de communication de Cucker-Smale

On se place dans le cas $N=2$ et $d=1$, en gardant la force de rappel introduite précédemment ; on prend $\psi(x,y) = \dfrac{1}{(1+(x-y)^2)^\gamma}$. $\bar{x} = x_1 - x_2$ et $\bar{v} = v_1 - v_2$ vérifient

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) & = & \bar{v}(t)\,dt \\ d\bar{v}(t) & = & -\lambda \dfrac{\bar{v}(t)}{(1+\bar{x}(t)^2)^\gamma}\,dt - \beta\bar{x}(t)\,dt + \sqrt{D}\,dW(t) \end{cases}$$

Théorème (Ergodicité polynomiale)

Le système ci-dessus converge à vitesse polynomiale ϕ_γ vers son unique probabilité invariante μ pour la norme en variation totale : pour tout t assez grand,

$$\|P_t((x,v),.) - \mu\|_{TV} \leqslant CV(x,v)\phi_\gamma(t)$$

où ϕ_γ est défini par $\phi_\gamma(t) = (\gamma t+1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ si $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$, $\phi_\gamma(t) = \dfrac{4\gamma-1}{4\gamma}(t+1)^{-\frac{1}{4\gamma-1}}$ sinon et V est donnée par $V(x,v) = \beta x^2 + \lambda f(x)\,v + v^2$, avec f la primitive de ψ s'annulant en 0.

Preuve basée sur un résultat de D. Bakry, P. Cattiaux, A. Guillin '08.

1. Dans le monde déterministe : flocking et le modèle de Cucker-Smale
   - Une définition mathématique du flocking
   - Le modèle (déterministe) de Cucker-Smale
2. Vers un univers aléatoire : variations et évolutions autour d'un modèle stochastique de Cucker-Smale
   - Le modèle de Ha, Lee et Levy
   - Avec un taux de communication constant
   - En rajoutant une force de rappel
   - Avec deux particules et le taux de communication de Cucker et Smale
   - Perturbation du cas constant et développement en amas
3. Chaoticité et propagation du chaos

Perturbation du cas constant

On prend $\psi = 1$, $d = 1$ et N quelconque.

L'équation autonome en $\hat{v}$ suivante est satisfaite dans $\mathbb{R}^N$:

$$d\,\hat{v}(t) = -\lambda\,\hat{v}(t)\,dt + \sqrt{D}\,d\widehat{W}(t)$$

Soient $\mathscr{H}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^N$ défini par $\mathscr{H} = \{\hat{v} \in \mathbb{R}^N | \hat{v}_1 + \ldots + \hat{v}_N = 0\}$, t_0 et β deux réels strictement positifs, et $b : \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{R}^N$ une fonction bornée mesurable.
Que peut-on dire pour le système perturbé

$$d\,\hat{v}(t) = -\lambda\,\hat{v}(t)\,dt + \beta\,b(\hat{x}(t))\,dt + \sqrt{D}\,d\widehat{W}(t)\,?$$

Théorème (Probabilité invariante et convergence exponentielle)

Si β est suffisamment petit, la projection sur $\mathscr{H}$ du processus solution de

$$d\,\hat{v}(t) = -\lambda\,\hat{v}(t)\,dt + \beta\,b\left((\hat{v})_{t-t_0}^{t}\right)\,dt + \sqrt{D}\,d\widehat{W}(t)$$

converge avec une vitesse exponentielle vers son unique probabilité invariante.

Idée de la preuve : méthode du développement en amas (cluster expansion), utilisée en mécanique statistique (R. Minlos, S. Roelly et H. Zessin '00 ; P. Dai Pra, S. Roelly '04).

Chaoticité

On s'intéresse au comportement asymptotique quand le nombre N de particules devient grand, dans le cadre général :

$$\begin{cases} d\hat{x}_i(t) & = & \hat{v}_i(t)dt \\ d\hat{v}_i(t) & = & -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(\hat{x}_i(t),\hat{x}_j(t))\,(\hat{v}_i(t)-\hat{v}_j(t))\,dt+\sqrt{D}\,d\widehat{W}_i(t), \end{cases}$$

On cherche un résultat de type propagation du chaos :

Chaoticité

Une suite $(Q_N)_{N\geqslant 1}$ de probabilités sur E^N est Q-chaotique, pour une probabilité Q sur un espace polonais E, si pour tout entier fixé k et pour toutes fonctions $f_1,\ldots,f_k$ bornées sur E,

$$\lim_{N\to\infty}\int f_1(x_1)\ldots f_k(x_k)\,dQ_N(x_1,\ldots,x_N)=\prod_{i=1}^{k}\int f_i(x_i)\,dQ(x_i).$$

Soient η_N définie par $\eta_N(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{(\hat{x}_i^N,\hat{v}_i^N)(\omega)}$ la mesure empirique associée au système à N particules, et π_N sa loi sur l'ensemble des probabilités sur $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^{2Nd})$.

Théorème (Propagation du chaos)

On suppose que :

- ψ est lipschitzienne et qu'il existe ψ_1 et ψ_2 tels que pour tous x, y, $0 < \psi_1 \leqslant \psi(x,y) \leqslant \psi_2$;
- les particules sont indépendantes et échangeables à l'instant initial ;
- la loi initiale est suffisamment sympathique.

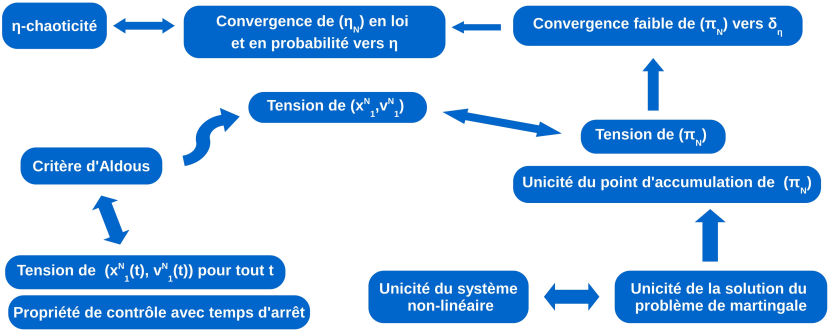
La suite $(\eta_N)_N$ est η-chaotique, avec η, probabilité sur $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^{2d})$, l'unique solution du problème de martingale associé au système non-linéaire

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{x}_t & = & \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_s \, ds \\ \mathbf{v}_t & = & \mathbf{v}_0 + W_t - \int_0^t \int \psi(\mathbf{x}_s, x)(\mathbf{v}_s - v)\, \eta_s(dx, dv)\, ds \\ \eta_t & = & \mathscr{L}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t), \end{array}\right.$$

qui lui-même admet une unique solution.

Résultat déjà obtenu, avec une preuve différente, par F. Bolley, J.A. Cañizo et J.A. Carrillo (2011).

Un petit schéma de preuve



Preuve selon un schéma standard (Sznitman '89, Méléard '95) en trois étapes :

- tension de $(\pi_N)_N$
- lien entre les points d'accumulation de $(\pi_N)_N$ et le problème de martingale
- unicité de la solution du problème de martingale

Merci pour votre attention !