Convexité et régularité pour les interpolations entropiques

Luigia Ripani

Congrès de clotûre du projet ANR STAB
En l'honneur de Patrick Cattiaux et Christian Léonard.

Toulouse, 6 juin 2017

ICJ, Université Lyon 1

Table des matières

Motivation

On considère l'entropie relative, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$$H(\mu|\nu) = \begin{cases} \int \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu, & \text{si } \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

• **Convexité le long des géodésiques** : si $(\mu_s^{MC})_{s\in[0,1]}$ est une géodésique dans $(P_2(\mathbb{R}^n), W_2)$, alors

$$[0,1] \ni s \mapsto H(\mu_s^{MC}|\mathcal{L})$$

est convexe.

Motivation

On considère l'entropie relative, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(Y)$

$$H(\mu|\nu) = \begin{cases} \int \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu, & \text{si } \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

• **Convexité le long des géodésiques** : si $(\mu_s^{MC})_{s\in[0,1]}$ est une géodésique dans $(P_2(\mathbb{R}^n), W_2)$, alors

$$[0,1] \ni s \mapsto \exp\{-H(\mu_s^{MC}|\mathcal{L})/n\}$$

est concave.

Motivation

On considère l'entropie relative, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(Y)$

$$H(\mu|\nu) = \begin{cases} \int \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu, & \text{si } \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

• **Convexité le long des géodésiques** : si $(\mu_s^{MC})_{s\in[0,1]}$ est une géodésique dans $(P_2(\mathbb{R}^n), W_2)$, alors

$$[0,1] \ni s \mapsto \exp\{-H(\mu_s^{MC}|\mathcal{L})/n\}$$

est concave.

$\rightarrow$ **EVI** pour la distance de Wasserstein, pour $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}^+ W_2^2(P_t u, v) \leq n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(v|\mathcal{L}) - H(P_t u|\mathcal{L})]}\right)$$

[Erbard-Kuwada-Sturm, 2013]

Motivation

On considère l'entropie relative, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(Y)$

$$H(\mu|\nu) = \begin{cases} \int \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu, & \text{si } \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

• **Convexité le long des géodésiques** : si $(\mu_s^{MC})_{s\in[0,1]}$ est une géodésique dans $(P_2(\mathbb{R}^n), W_2)$, alors

$$[0,1] \ni s \mapsto \exp\{-H(\mu_s^{MC}|\mathcal{L})/n\}$$

est concave.

$\rightarrow$ **EVI** pour la distance de Wasserstein, pour $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}^{+} W_2^2(P_t u, v) \leq n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(v|\mathcal{L}) - H(P_t u|\mathcal{L})]}\right)$$

[Erbard-Kuwada-Sturm, 2013]

$\rightarrow$ **Contraction** dimensionnelle de W_2, pour tout $t > 0$,

$$W_2^2(P_t u, P_t v) \leq W_2^2(u,v) - 2n \int_0^t \sinh^2\left[\frac{H(P_\tau u|\mathcal{L}) - H(P_\tau v|\mathcal{L})}{2n}\right] d\tau$$

[Bolley, Gentil, Guillin 2016, Bolley, Gentil, Guillin, Kuwada, 2016]

Problème de Schrödinger

Soit $\Omega = C([0,1], \mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ la loi du mouvement Brownien réversible,

$$L = \Delta/2$$

Problème de Schrödinger

Soit $\Omega = C([0,1],\mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ la loi du mouvement Brownien réversible,

$$L = \Delta/2 \qquad m = \mathcal{L}$$

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à L ;
$\Gamma f = |\nabla f|^2/2$ et $\Gamma_2 f = \|Hessf\|^2/4$

Problème de Schrödinger

Soit $\Omega = C([0,1], \mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ la loi du mouvement Brownien réversible,

$$L = \Delta/2 \qquad m = \mathcal{L}$$

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à L ;
$\Gamma f = |\nabla f|^2/2$ et $\Gamma_2 f = \|Hessf\|^2/4$

Définition (coût entropique)

Soient $\mu_0, \mu_1 \in P(\mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ fixées. Le *coût entropique* est défini,

$$\mathcal{A}(\mu_0, \mu_1) = \inf\{H(P|R)\ ;\ P \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ t.q. } P_0 = \mu_0 \text{ et } P_1 = \mu_1\}$$

Problème de Schrödinger

Soit $\Omega = C([0,1], \mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ la loi du mouvement Brownien réversible,

$$L = \Delta/2 \qquad m = \mathcal{L}$$

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à L ;
$\Gamma f = |\nabla f|^2/2$ et $\Gamma_2 f = \|Hess f\|^2/4$

Définition (coût entropique)

Soient $\mu_0, \mu_1 \in P(\mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ fixées. Le *coût entropique* est défini,

$$\mathcal{A}(\mu_0, \mu_1) = \inf\{H(P|R)\ ;\ P \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ t.q. } P_0 = \mu_0 \text{ et } P_1 = \mu_1\}$$

$$\Pi = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n);\ H(\mu|\mathcal{L}) < \infty \text{ et } \int |x|^2 d\mu < \infty\right\}$$

- $\mathcal{A}$ n'est pas une distance
- $\mathcal{A}$ est symétrique (R réversible)

Interpolation entropique

Définition

Soit $\hat{P} \in \mathcal{P}(\Omega)$ le minimisateur, on définit l'*interpolation entropique*, $\mu_s = \hat{P}_s = (X_s)_{\#}P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \forall s \in [0,1]$,

$$d\mu_s = e^{\psi_s + \varphi_s}\mathcal{L}.$$

Interpolation entropique

Définition

Soit $\hat{P} \in \mathcal{P}(\Omega)$ le minimisateur, on définit l'*interpolation entropique*, $\mu_s = \hat{P}_s = (X_s)_{\#}P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \forall s \in [0, 1]$,

$$d\mu_s = e^{\psi_s + \varphi_s}\mathcal{L}.$$

Elle satisfait l'équation du transport,

$$\partial_s \mu_s + \nabla \cdot (\mu_s \nabla \theta_s) = 0$$

où $\nabla \theta_s = (\nabla \varphi_s - \nabla \psi_s)/2$ est la vitesse de courant.

Concavité de l'entropie

Théorème (R. 2017)

Soient $\mu_0, \mu_1 \in \Pi$. *Soit* $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ *l'interpolation entropique entre* μ_0 *et* μ_1. *Alors, la fonction,*

$$\Psi : [0,1] \ni s \mapsto e^{-H(\mu_s|\mathcal{L})/n}$$

est concave.

Concavité de l'entropie

Théorème (R. 2017)

Soient $\mu_0, \mu_1 \in \Pi$. Soit $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ l'interpolation entropique entre μ_0 et μ_1. Alors, la fonction,

$$\Psi : [0,1] \ni s \mapsto e^{-H(\mu_s|\mathcal{L})/n}$$

est concave.

Idée de la preuve

$$\Psi''(s) \quad = \quad \frac{e^{-H(\mu_s)/n}}{n}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{d}{ds}H(\mu_s|\mathcal{L})\right)^2 - \frac{d^2}{ds^2}H(\mu_s|\mathcal{L})\right].$$

Concavité de l'entropie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} H(\mu_s|\mathcal{L}) &= 2\int \Gamma(\theta_s, \mu_s)\, dx = \int \nabla\theta_s \cdot \nabla\mu_s\, dx \\
\frac{d^2}{ds^2} H(\mu_s|\mathcal{L}) &= \int 4\Gamma_2(\theta_s) + \Gamma_2(\log \mu_s) d\mu_s
\end{aligned}$$

Concavité de l'entropie

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}H(\mu_s|\mathcal{L}) &= 2\int \Gamma(\theta_s,\mu_s)\,dx = \int \nabla\theta_s\cdot\nabla\mu_s\,dx \\
\frac{d^2}{ds^2}H(\mu_s|\mathcal{L}) &= \int 4\Gamma_2(\theta_s)+\Gamma_2(\log\mu_s)d\mu_s \qquad \left(\Gamma_2 f \geq \frac{1}{4n}(\Delta f)^2\right) \\
&\geq \frac{1}{n}\int (\Delta\theta_s)^2 + \frac{1}{4}(\Delta\log\mu_s)^2 d\mu_s \\
&\geq \frac{1}{n}\int (\Delta\theta_s)^2 d\mu_s \\
&\geq \frac{1}{n}\left(\int \Delta\theta_s d\mu_s\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\left(\int \nabla\theta_s\cdot\nabla\mu_s\,dx\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{d}{ds}H(\mu_s|\mathcal{L})\right)^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Regularité du coût entropique

Théorème (R. 2017)

Soient $u, v \in \Pi$*. Soit* $(P_t)_{t\geq 0}$ *le semi-groupe de la chaleur. Alors, la fonction*

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \mathcal{A}(u\,\mathcal{L}, P_t v\,\mathcal{L})$$

est différentiable. En particulier, en $t = 0$*,*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(u, P_t v) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L})$$

où $(\mu_s)_{0\leq s\leq 1}$ *est l'interpolation entropique entre* u *et* v*.*

Regularité du coût entropique

Idée de la preuve

Étape 1.

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,\ v)}{t} \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

Rappel : Dualité de Kantorovich

[Mikami, Thieullen 2006, Gentil, Léonard, R. 2015]

$$\mathcal{A}(\mu_0, \mu_1) = H(\mu_0|\mathcal{L}) + \sup_{\psi \in C_b(\mathbb{R}^n)} \left\{ \int \psi \, d\mu_1 - \int Q_1\psi \, d\mu_0 \right\}$$

où, $Q_1\psi := \log P_1 e^{\psi}$. Le sup est atteint quand $\psi = \psi_1$.

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \xi P_t v \, dx - \int Q_1 \xi u \, dx - \int \psi v \, dx + \int Q_1 \psi u \, dx$$

où $\xi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et ψ est optimale, avec $\mu_0 = u$ et $\mu_1 = v$. On choisit $\xi = \psi$,

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \psi (P_t v - v) \, dx$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \xi P_t v \, dx - \int Q_1 \xi u \, dx - \int \psi v \, dx + \int Q_1 \psi u \, dx$$

où $\xi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et ψ est optimale, avec $\mu_0 = u$ et $\mu_1 = v$. On choisit $\xi = \psi$,

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \psi(P_t v - v) \, dx$$

Par symétrie,

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(P_t v, u) - \mathcal{A}(v, u)$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \xi P_t v \, dx - \int Q_1 \xi u \, dx - \int \psi v \, dx + \int Q_1 \psi u \, dx$$

où $\xi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et ψ est optimale, avec $\mu_0 = u$ et $\mu_1 = v$. On choisit $\xi = \psi$,

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \geq \int \psi (P_t v - v) \, dx$$

Par symétrie,

$$\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(P_t v, u) - \mathcal{A}(v, u)$$

$$\mathcal{A}(P_t v, u) - \mathcal{A}(v, u) \geq H(P_t v | \mathcal{L}) - H(v | \mathcal{L}) - \int Q_1 \psi^* (P_t v - v) \, dx$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,\ v)}{t} \geq \frac{1}{2}[H(P_t v|\mathcal{L})) - H(v|\mathcal{L})] +$$
$$\frac{1}{2}\int \psi \frac{(P_t v - v)}{t}\, dx - \frac{1}{2}\int Q_1\psi^* \frac{(P_t v - v)}{t}\, dx$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

La $\liminf$ pour $t \to 0^+$,

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,\ v)}{t} \geq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{H(P_t v|\mathcal{L})}{2} + \frac{1}{4}\int \psi \Delta v\, dx - \frac{1}{4}\int \psi^* \Delta v\, dx$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

La $\liminf$ pour $t \to 0^+$,

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,\ v)}{t} \geq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{H(P_t v|\mathcal{L})}{2} + \frac{1}{4}\int \psi \Delta v\, dx - \frac{1}{4}\int \psi^* \Delta v\, dx$$

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v)}{t} \geq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{H(P_t v|\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \left(\frac{\nabla\psi - \nabla Q_1 \psi^*}{2}\right)\cdot \nabla v\, dx}_{= \frac{d}{ds} H(\mu_s|\mathcal{L})\big|_{s=1}}$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

Étape 2.

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v)}{t} \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

Étape 2.

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,v)}{t} \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

Rappel : formulation de Benamou-Brenier

[Chen, Georgiu, Pavon 2015 ; Gentil, Léonard, R. 2015]

$$\mathcal{A}(\mu_0, \mu_1) = \frac{1}{2}[H(\mu_0|\mathcal{L}) + H(\mu_1|\mathcal{L})] + \frac{1}{2} \inf \int_0^1 \int \left(|v_t(z)|^2 + \frac{1}{4}|\nabla \log \rho_t(z)|^2 \right) \rho_t(z)\, dzdt$$

où l'inf est sur tous les couples $(\rho_t, v_t)_{0\leq t\leq 1}$ t.q.

$$\begin{cases} \rho_t \in P(\mathbb{R}^n),\ \forall\, 0 \leq t \leq 1, \\ \rho_0 = \mu_0,\ \rho_1 = \mu_1, \\ \partial \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t v_t) = 0. \end{cases}$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\mathcal{A}(u,v) = \frac{H(u|\mathcal{L}) + H(v|\mathcal{L})}{2} + \int_0^1 \int \left[\frac{|\nabla \theta_s|^2}{2} + \frac{1}{8} |\nabla \log \mu_s|^2 \right] d\mu_s ds$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\mathcal{A}(u,v) = \frac{H(u|\mathcal{L}) + H(v|\mathcal{L})}{2} + \int_0^1 \int \left[\frac{|\nabla\theta_s|^2}{2} + \frac{1}{8}|\nabla \log \mu_s|^2 \right] d\mu_s ds$$

$$\mathcal{A}(u, P_t v) \leq \frac{1}{2}[H(u|\mathcal{L}) + H(P_t v|\mathcal{L})] + \int_0^1 \int \frac{|v_s^t|^2}{2}\mu_s^t + \frac{1}{8}|\nabla \log \mu_s^t|^2 \mu_s^t \, dxds$$

où $\mu_s^t = P_{st}\mu_s$ et $v_s^t = -\frac{t}{2}\nabla \log \mu_s^t + \frac{\mathbf{P}_{st}(\mu_s \nabla\theta_s)}{\mu_s^t}$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v)}{t} \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) + \\ + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\int_0^1 \int \frac{|v_s^t|^2}{2}\mu_s^t + \frac{1}{8}|\nabla \log \mu_s^t|^2 \mu_s^t dxds\right]$$

Regularité du coût entropique (idée de la preuve)

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,v)}{t} \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) + \\ + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\int_0^1 \int \frac{|v_s^t|^2}{2}\mu_s^t + \frac{1}{8}|\nabla \log \mu_s^t|^2 \mu_s^t dxds\right]$$

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u,v)}{t} \leq \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L}) - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

$\square$

Evolution variational inequality (EVI)

Corollaire

Soient $u, v \in \Pi$ *et* $(P_t)_{t \geq 0}$ *le semi-groupe de la chaleur, alors*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u\,\mathcal{L}, P_t v\,\mathcal{L}) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

pour tout $t \geq 0$.

Evolution variational inequality (EVI)

Corollaire

Soient $u, v \in \Pi$ et $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur, alors

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u\,\mathcal{L}, P_t v\,\mathcal{L}) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u, P_t v) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(P_t v|\mathcal{L})$$

EVI (preuve)

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

Par la concavité de la fonction Ψ,

$$\Psi'(1) \leq \Psi(1) - \Psi(0)$$

EVI (preuve)

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L})$$

Par la concavité de la fonction Ψ,

$$\Psi'(1) \leq \Psi(1) - \Psi(0)$$

$$-\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} H(\mu_s|\mathcal{L}) \leq n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(v|\mathcal{L})]}\right)$$

Donc,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u\,\mathcal{L}, P_t v\,\mathcal{L}) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(v|\mathcal{L})]}\right).$$

$\square$

Contraction

Corollaire

Soient $u, v \in \Pi$ *et* $(P_t)_{t\geq 0}$ *le semi-groupe de la chaleur. Alors pour tout* $t > 0$*,*

$$\mathcal{A}(P_\tau u, P_\tau v) \leq \mathcal{A}(u, v) - n \int_0^\tau \sinh^2\left(\frac{H(P_t u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})}{2n}\right) dt.$$

Passage à la limite

Soit R^ε associée à $L^\varepsilon = \varepsilon L$, avec $\varepsilon > 0$, on définit,

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\mu_0, \mu_1) = \inf\{\varepsilon H(P|R^\varepsilon) \ ; \ P \in P(\Omega) \text{ t.q. } P_0 = \mu_0 \text{ et } P_1 = \mu_1\}$$

Passage à la limite

Soit R^ε associée à $L^\varepsilon = \varepsilon L$, avec $\varepsilon > 0$, on définit,

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\mu_0, \mu_1) = \inf\{\varepsilon H(P|R^\varepsilon)\ ;\ P \in P(\Omega) \text{ t.q. } P_0 = \mu_0 \text{ et } P_1 = \mu_1\}$$

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}^\varepsilon(\mu_0, \mu_1) = \frac{W_2^2(\mu_0, \mu_1)}{2}.$$

[Léonard, 2014]

Passage à la limite : EVI

Corollaire

Soient $u, v \in \Pi$ et $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur. Les suivants sont équivalents :

(i) $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right), \ \forall t \geq 0$

(ii) $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(v|\mathcal{L})]}\right)$

(iii) $\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \leq \frac{n}{2}t\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$

Passage à la limite : EVI

Corollaire

Soient $u, v \in \Pi$ *et* $(P_t)_{t\geq 0}$ *le semi-groupe de la chaleur. Les suivants sont équivalents :*

(i) $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right), \ \forall t \geq 0$

(ii) $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u, P_t v) \leq \frac{n}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(v|\mathcal{L})]}\right)$

(iii) $\mathcal{A}(u, P_t v) - \mathcal{A}(u, v) \leq \frac{n}{2}t\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$

Démonstration.

$(i) \implies (iii)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u, P_\tau v) - \mathcal{A}(u, v) &\leq \frac{n}{2}\int_0^\tau 1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]} dt \\
&\leq \frac{n}{2}\tau\left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_\tau v|\mathcal{L})]}\right)
\end{aligned}$$

$(iii) \implies (ii)$ Immédiat, $(ii) \implies (i)$ Propriété de semi-groupe. $\square$

Passage à la limite

EVI pour W_2 :

$$\mathcal{A}^{\varepsilon}(u, P_t v) - \mathcal{A}^{\varepsilon}(u, v) \leq \frac{n}{2} t \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

Pour $\varepsilon \to 0$,

$$W_2^2(u, P_t v) - W_2^2(u, v) \leq nt \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

Passage à la limite

EVI pour W_2 :

$$\mathcal{A}^{\varepsilon}(u, P_t v) - \mathcal{A}^{\varepsilon}(u, v) \leq \frac{n}{2} t \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

Pour $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{W_2^2(u, P_t v) - W_2^2(u, v)}{t} \leq n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

Passage à la limite

EVI pour W_2 :

$$\mathcal{A}^\varepsilon(u, P_t v) - \mathcal{A}^\varepsilon(u, v) \leq \frac{n}{2} t \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

Pour $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{W_2^2(u, P_t v) - W_2^2(u, v)}{t} \leq n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})]}\right)$$

$$\frac{d}{dt}^{+}\Big|_{t=0} W_2^2(u, P_t v) \leq n(1 - e^{-\frac{1}{n}[H(u|\mathcal{L}) - H(v|\mathcal{L})]})$$

[Erbar, Kuwada, Sturm, 2015]

Passage à la limite

Contraction pour W_2 :

$$\mathcal{A}^\varepsilon(P_\tau u, P_\tau v) \leq \mathcal{A}^\varepsilon(u, v) - n \int_0^\tau \sinh^2\left(\frac{H(P_t u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})}{2n}\right) dt$$

Pour $\varepsilon \to 0$,

$$W_2^2(P_\tau u, P_\tau v) - W_2^2(u, v) \leq \\ - 2n \int_0^\tau \sinh^2\left(\frac{H(P_t u|\mathcal{L}) - H(P_t v|\mathcal{L})}{2n}\right) dt.$$

[Bolley, Gentil, Guillin, 2016,
Bolley, Gentil, Guillin, Kuwada, 2016]

Merci de votre attention !