Particules pour Keller-Segel

avec Benjamin Jourdain (ENPC)

L'équation

Keller-Segel (1970). Modèle de chimiotaxie.

Des cellules diffusent dans le plan et s'attirent (en fait, sont attirées par une substance qu'elles déposent).

Pour $f_t(x) =$ densité de cellules (particules) au temps $t \geq 0$ au point $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_t f_t(x) + \chi \mathrm{div}_x((K \star f_t)(x) f_t(x)) = \Delta_x f_t(x),$$

où

$$K(x) = \frac{-x}{2\pi |x|^2}.$$

χ est un paramètre de "sensibilité" à la substance.

On peut supposer que $\int_{\mathbb{R}^2} f_0(x)dx = 1$ et que $\int_{\mathbb{R}^2} x f_0(x)dx = 0$, propriétés conservées au cours du temps (si tout va bien).

Même si on ne s'intéresse pas particulièrement à la biologie, c'est un modèle ultra-naturel de browniens gravitants.

On a compétition entre la diffusion (qui tend à éloigner les particules) et l'attraction.

La dimension 2 est "critique" : il y a une transition de phase (suivant que $\chi > 0$ est grand ou petit), soit il se forme un paquet macroscopique en temps fini, soit il ne s'en forme pas.

Un argument douteux : $B_t \simeq \sqrt{t}$, et la solution de $y' = 1/y$ est $y(t) = \sqrt{2t}$.

Un calcul élémentaire montre que si f_t est solution alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 f_t(x) dx = 4 - \chi/(2\pi).$$

Donc si $\chi > 8\pi$, il y a forcément une sorte d'explosion.

Blanchet, Dolbeault, Perthame (2006) : existence, $\chi < 8\pi$.

Egaña, Mischlet (2016) : unicité, $\chi < 8\pi$.

Dolbeault-Schmeiser (2009) : solutions globales généralisées, $\chi > 8\pi$.

EDS nonlinéaire

$$X_t = X_0 + \sqrt{2}B_t - \frac{\chi}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X_s - x}{|X_s - x|^2} f_s(dx)ds \quad et \quad X_t \sim f_t.$$

Alors f_t solution (faible) de KS. Pour définir une solution (de KS ou de l'EDS),

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^{-1} f_s(dx)f_s(dy)ds < \infty \quad \forall t \geq 0$$

suffit donc.

Système de particules

On considère $N \geq 2$ particules de positions $X_t^{1,N}, \ldots, X_t^{N,N}$

$$X_t^{i,N} = X_0^{i,N} + \sqrt{2} B_t^i - \frac{\chi}{2\pi N} \sum_{j \neq i}^{N} \int_0^t \frac{X_s^{i,N} - X_s^{j,N}}{|X_s^{i,N} - X_s^{j,N}|^2} ds.$$

Les $X_0^{i,N}$ sont supposés i.i.d. de loi f_0.

Existence pas claire. De plus, la singularité est forcément visitée :

Proposition

Pour tout $N \geq 2$, tout $\chi > 0$, tout $f_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, tout $t_0 > 0$ et toute solution (si existe) $(X_t^{i,N})_{i=1,\ldots,N, t \in [0,t_0]}$,

$$\mathbb{P}\Big(\exists\, s \in [0, t_0],\ \exists\, 1 \leq i < j \leq N \ :\ X_s^{i,N} = X_s^{j,N} \Big) > 0.$$

L'idée : 2 browniens plans indépendants se touchent “presque”...

Théorème

Soit $\chi \in (0, 2\pi)$ *et* $f_0 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$. *Pour tout* $N \geq 2$, *il existe une solution* $(X_t^{i,N})_{t\in[0,\infty),i=1,\dots,N}$, *qui de plus vérifie, pour tout* $\alpha \in (\chi/(2\pi), 1)$, *tout* $T > 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |X_s^{1,N} - X_s^{2,N}|^{\alpha-2} ds\Big] \leq C_T. \qquad (1)$$

Ceci suffit amplement (car $\alpha - 2 < -1$*) pour garantir de la compacité et en déduire que, si* $\mu_t^N = N^{-1}\sum_1^N \delta_{X_t^{i,N}}$, *on peut trouver* N_k *telle que* $(\mu_t^{N_k})_{t\geq 0}$ *converge vers un* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *qui est p.s. solution faible de KS avec* $\mu_0 = f_0$.

$f_0 = \delta_0$ autorisée.

Gros défaut : on ne sait pas (du tout) montrer que la solution faible obtenue est suffisamment régulière pour tomber dans la classe d'unicité.

En gros, (1) implique l'existence du système de particules.

Preuve de (1) : on applique soigneusement Itô, avec $\alpha \in (0,1)$, on trouve (presque vrai)

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^\alpha] = 2\alpha^2\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{\alpha-2}] + \frac{\alpha\chi}{\pi}\mathbb{E}\Big[\frac{X_t^{1,N} - X_t^{2,N}}{|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{2-\alpha}} \cdot \frac{X_t^{3,N} - X_t^{1,N}}{|X_t^{3,N} - X_t^{1,N}|^2}\Big] \geq \Big(2\alpha^2 - \frac{\alpha\chi}{\pi}\Big)\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{\alpha-2}].$$

Si $\chi < 2\pi$ et si $2\alpha^2 - \frac{\alpha\chi}{\pi} > 0$, en intégrant en temps,

$$\int_0^T \mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{\alpha-2}]dt \leq C\mathbb{E}[|X_T^{1,N} - X_T^{2,N}|^\alpha] \leq C_T.$$

Super simple, mais s'écroule pour $\chi \geq 2\pi$.

Le Hölder est très grossier.

Autres résultats :

1. Quel que soit χ, quel que soit $N \geq 3$, existence du système de particules jusqu'au temps (aléatoire) de la première collision triple (ou $+$).

2. Si $\chi \leq 8\pi(N-2)/(N-1)$, il n'y a jamais de collision triple (ou $+$), donc le système existe globalement en temps.

3. Si $\chi > 8\pi(N-2)/(N-1)$, il y a toujours une collision triple (ou $+$) en temps fini.

4. Résultats précis sur la formation d'amas quand $N = 2$ pour toutes les valeurs de χ.

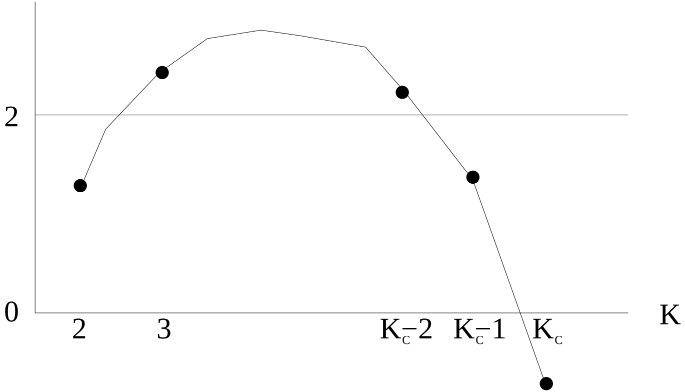
En cours, avec Miclo (assez peu d'espoir).

Rappel : un processus de Bessel de dimension d est la norme d'un MB de dimension d. Ça s'étend aux dimensions non entières. On a deux transitions : un Bessel(δ)
- ne touche jamais 0 si $\delta \geq 2$,
- touche 0 et repart immédiatement si $\delta \in (0,2)$,
- touche 0 et y est absorbé si $\delta \leq 0$.

Tant que le système de particules existe, le processus $\sum_1^N |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^N|^2$ est (exactement) un Bessel de dimension $(N-1)(2 - \chi/(4\pi))$.

Donc si $\chi \geq 8\pi$, ce processus est absorbé en 0, i.e. toutes les particules se retrouvent au même endroit et restent collées.

Bien plus formel : on considère un ensemble de K particules (e.g. $1, 2, ..., K$), leur var empirique $R_t^K = \sum_1^K |X_t^{i,N} - \mathit{barycentre}|^2$. Tant que les autres particules sont "loin", R_t^K se comporte comme un Bessel de dimension $(K-1)(2-\chi K/(4\pi N))$. En gros, avec $K_c = \lceil 8\pi N/\chi \rceil$,



Donc on s'attend à ce qu'il y ait :
des collisions non collantes à 2 particules,
des collisions non collantes à $K_C - 1$ particules,
un amas qui se forme à K_C particules (ou plus ?)

1. Cohésion globale. En gros, si on part avec K particules au même endroit, alors si $K < K_C$, les browniens vont "battre" la force de cohésion et les particules vont se décoller. Si $K \geq K_C$, les browniens ne parviendront pas à décoller les particules.

2. Le paquet se forme "d'un coup". Pas petit à petit.

3. PROBLEME IMPORTANT : quand le paquet se forme, contient-il exactement K_C particules ? (Pour KS : quand la solution explose, la Dirac qui se forme est-elle de masse exactement $8\pi/\chi$? Presque complètement ouvert je crois).

4. Juste avant la formation du paquet, infinité (ou pas) de collisions à $K_C - 1$? Avant chaque collision à $K_C - 1$, infinité (ou pas) de collisions binaires ?