Echelles de temps et trou spectral pour les distributions quasi-stationnaires des grandes populations

Sylvie Méléard, Ecole Polytechnique, France

Toulouse, Juin 2017, En l'honneur de Patrick Cattiaux et Christian Léonard

Joint work with Jean-René Chazottes and Pierre Collet.

Processus de naissance et mort

On considère un processus de naissance et mort à temps continu $(N_t^K, t \geq 0)$ sur $\mathbb{N}$ de taux de naissance λ_n^K et de taux de mort μ_n^K pour une taille de population n.

Le paramètre K échelonne la taille de la population (capacité en ressources, taille de l'habitat). K est grand.

Le processus démarre de l'état $[x_0 K]$ avec $x_0 > 0$.

On suppose que λ_n^K et μ_n^K ont les formes fonctionnelles

$$\lambda_n^K = n\,\lambda(n/K) = K\,B(n/K)\ ,$$

$$\mu_n^K = n\,\mu(n/K) = K\,D(n/K)\ .$$

Le générateur infinitésimal est

$$(\mathcal{L}_K u)(n) = \lambda_n^K \big(u_{n+1} - u_n\big) + \mu_n^K \big(u_{n-1} - u_n\big).$$

On note $T_0 = \inf\{t > 0; N_t = 0\}$ le temps d'extinction.

Hypothèses sur B et D (sur $\mathbb{R}^+$):

- $B(0) = D(0) = 0$ *(*$\lambda_0 = \mu_0 = 0$*)*
- *B et D sont régulières*
- $\lim_{x\to\infty} D(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{D(x)} = 0$.
- $B'(0) > D'(0) > 0$.
- *La fonction $B - D$ a un unique zéro positif x_* avec* $B'(x_*) - D'(x_*) < 0$.

Alors l'E.D.O.

$$\frac{dx}{dt} = B(x) - D(x)$$

admet un point fixe stable x_* qui est un attracteur global sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple: processus de naissance et mort logistique
$B(x) = b\,x$; $D(x) = x(d + cx)$ et $\frac{dx}{dt} = x(b - d - cx)$.

Distribution quasi-stationnaire

Le processus $(N_t^K, t \geq 0)$ *est surcritique si la taille de la population est petite (* $B'(0) > D'(0)$ *) mais sous-critique pour une grande population puisque* $\lim_{x\to\infty} B(x)/D(x) = 0$.

(Van Doorn '91) Pour K *fixé, le processus* $(N_t^K, t \geq 0)$ *atteint presque-sûrement* 0 *en temps fini et il existe une unique probabilité* ν^K *sur* $\mathbb{N}^*$ *telle que*

$$\mathbb{P}_{\nu^K}\big(N_t^K \in A \,\big|\, T_0 > t\big) = \nu^K(A) \qquad \forall t > 0, A \subset \mathbb{N}^*.$$

De plus pour tout $n > 0$*, on a*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_n\big(N_t^K \in A \,\big|\, T_0 > t\big) = \nu^K(A)\ .$$

ν^K *est appelée une distribution quasi-stationaire (QSD)*.

Grande littérature sur le sujet,en particulier Cattiaux & Cie '09, M.-Villemonais '12, Collet-Martinez-San Martin '13.

Comme ν^K est une QSD, il existe $\rho_0(K) > 0$ tel que pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}_{\nu^K}\big(T_0 > t\big) = e^{-\rho_0(K)\,t}\ .$$

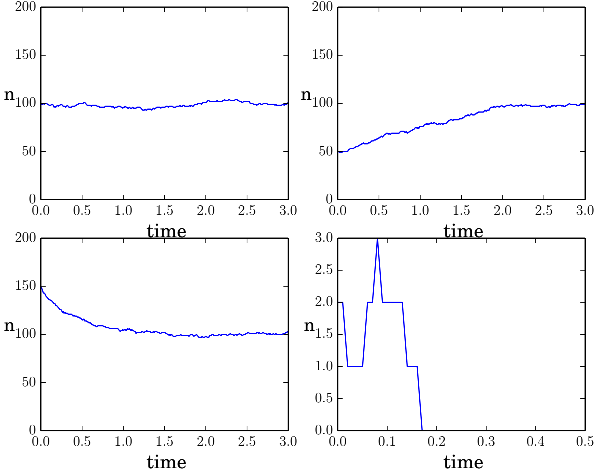
$\rho_0(K)$ est le taux d'extinction à partir de la QSD ν^K. En particulier,

$$\mathbb{E}_{\nu^K}(T_0) = \frac{1}{\rho_0(K)}.$$

Pouvons-nous obtenir l'exacte dépendance de ρ_0 comme fonction de K, pour K grand?

Comment se comportent les trajectoires du processus, pour K grand?

Trajectoires de N_t^K



Théorème (Kurtz '70)

Quand $K \to +\infty$, le processus $(N_t^K/K, t \geq 0)$ converge p.s.vers $(x(t), t \geq 0)$ solution de l'E.D.O. sur tout intervalle de temps fini (N_0^K/K converge vers $x_0 > 0$).

• On en déduit que N_t^K est proche de $[x_* K]$ pour t grand.

• Les limites en t et K ne commutent donc pas.

Les propriétés statistiques du processus avant extinction sont-elles liées à la QSD ν^K? Pouvons-nous voir la QSD?

• Si le temps que le processus met pour atteindre le "régime QSD" est nettement plus petit que $1/\rho_0(K)$, on pourra voir la QSD.

• Nous allons prouver qu'il existe une autre échelle $1/\rho_1(K)$ qui décrit le temps d'atteinte du "régime QSD" et satisfait

$$\frac{1}{\rho_1(K)} << \frac{1}{\rho_0(K)} \qquad \text{pour } K \text{ grand.}$$

• *On a besoin d'une borne inférieure pour $\rho_1(K)$ et d'une borne supérieure pour $\rho_0(K)$ pour prouver que $\rho_1(K) >> \rho_0(K)$.*

Théorème

Pour K suffisamment grand,

$$\rho_0(K) = \left(a + \mathcal{O}\left(\frac{(\log K)^3}{\sqrt{K}}\right)\right) \sqrt{K}\, e^{-b\,K}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \left(\sqrt{\frac{B'(0)}{D'(0)}} - \sqrt{\frac{D'(0)}{B'(0)}}\right) \sqrt{\frac{D'(x_*)}{D(x_*)} - \frac{B'(x_*)}{B(x_*)}}\, x_*\, B(x_*)\,,$$

$$b = \int_0^{x_*} \frac{B(x)}{D(x)}\, dx\,,$$

$$et \qquad \rho_1(K) \geq \frac{c_1}{\log K}\,,$$

avec $c_1 > 0$ indépendant de K. De plus,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} d_{\mathrm{TV}}\left(\mathbb{P}_n\left(N_t^K \in \cdot \mid T_0 > t\right),\, \nu^K\right) \leq c_2\, e^{-\rho_1(K)\, t},$$

avec $c_2 > 0$ indépendant de K.

- On prouve de plus que la QSD est proche d'une loi normale centrée en $[Kx*]$.
- On a aussi des résultats sans conditionnement.

  Il existe une suite

$$\alpha_n(K) = 1 - \left(\frac{D'(0)}{B'(0)}\right)^n + \frac{\mathcal{O}(1)}{K}$$

telle que pour tout K suffisamment grand et t tel que

$$\frac{K \log K}{\rho_1 - \rho_0} \ll t \ll \frac{1}{\rho_0},$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} d_{TV}\left(\mathbb{P}_n(N_t^K \in \cdot)\,,\ \alpha_n(K)\,\nu^K + (1 - \alpha_n(K))\,\delta_0\right) \ll 1.$$

S'il est issu de $n \in \mathbb{N}^*$, le processus est très proche de 0 avec probabilité $1 - \alpha_n$ ou il se trouve dans le régime QSD avec probabilité α_n.

Idées de preuve

Les nombres $-\rho_0(K)$ et $-\rho_1(K)$ sont les valeurs propres du générateur L^K du processus tué

$$(L_K u)(n) = \lambda_n^K u_{n+1} + \mu_n^K u_{n-1} \mathbf{1}_{n\geq 2} - (\lambda_n^K + \mu_n^K) u_n.$$

L'opérateur L_K est auto-adjoint dans $\ell^2(\pi)$, (avec $\pi_n = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n}$), avec résolvante compacte, spectre discret et valeurs propres négatives.

La valeur propre maximale $-\rho_0(K)$ est simple et liée au vecteur propre positif φ_n.

La QSD $(\nu_n^K, n \in \mathbb{N}^*)$ est donnée par

$$\nu_n^K = \frac{\pi_n \varphi_n}{\sum_i \pi_i \varphi_i}$$

On remarque que $u_n^0 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j \pi_j}$ satisfait $(L_K u^0)(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ mais $u^0 \notin \ell^2(\pi)$, et que la suite constante 1 satisfait $(L_K 1)(n) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Pour ρ petit, on cherche une bonne approximation de $(L_K u)(n) = -\rho\, u_n$, de la forme
$u_n = u_n^0 (1 + \delta_n)$ pour $n \leq K\, x_*$
et de la forme $1 + w_n$ pour $n \geq K\, x_*$.

La condition de matching (en $n = [K\, x_*]$) des deux approximations donne une équation pour $\rho_0(K)$. (cf. Levinson)

Pour le trou spectral $\rho_1(K) - \rho_0(K)$, nous établissons une inégalité de Poincaré: pour tout $y \in \ell^2(\pi)$ à support fini, on a

$$-\langle y\,,\, L^K\, y\rangle_{\ell^2(\pi)} \geq \left(\rho_0(K) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\log K}\right) \|y\|^2_{\ell^2(\pi)}\,.$$

Le cas multi-type; $d > 1$

On considère $d > 1$ espèces en compétition (pour les ressources).

$$N_t^K = (N_t^{K,1}, \cdots, N_t^{K,d}) \in (\mathbb{N})^d.$$

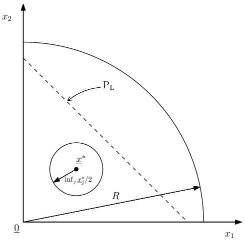
Le générateur est donné par

$$\mathcal{L}_K f(\vec{n}) = K \sum_{j=1}^{d} \left[B_j(\frac{\vec{n}}{K})\,(f(\vec{n}+e^{(j)}) - f(\vec{n})) + D_j(\frac{\vec{n}}{K})\,(f(\vec{n}-e^{(j)}) - f(\vec{n})) \right].$$

Le champ de vecteurs $B - D$ a un unique point fixe $\vec{x}_* \in (\mathbb{R}_+)^d$ et toute trajectoire issue de $B(0,R) \cap (\mathbb{R}_+)^d \setminus \{0\}$ converge vers $\vec{x}_*$.

Descente de l'infini:

$$\sup_{s>L} \frac{B_{max}(s)}{D_{min}(s)} < 1/2.$$



$$\forall\ \|x\| \le R,\ \langle B(x) - D(x), x - x^* \rangle \le -\beta \|x\| \|x - x^*\|^2.$$

On a des résultats similaires mais moins précis.

Théorème

Il existe des constantes $a_1 > 0, \ldots, a_4 > 0$ *telles que pour tout* K *large enough*

$$e^{-a_1 K} \le \rho_0(K) \le e^{-a_2 K}\,, \qquad \rho_1(K) \ge \frac{a_3}{\log K}\,.$$

Il existe une unique QSD ν^K*, le taux d'extinction est* $\rho_0(K)$*, et*

$$\sup_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d\setminus\{\vec{0}\}} d_{TV}\Big(\mathbb{P}_{\vec{n}}(\vec{N}_t^K \in \cdot \mid T_0 > t)\,,\, \nu^K\Big) \le a_4\, e^{-\rho_1(K)\,t}\,.$$

et il existe $p_K(\vec{n}) \in (c, 1]$ *tel que pour*

$$\log K \ll t \ll 1/\rho_0(K),$$

$$\sup_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d\setminus\{\vec{0}\}} d_{TV}\Big(\mathbb{P}_{\vec{n}}(N_t^K \in \cdot\,)\,,\, e^{-\rho_0(K)t} p_K(\vec{n})\,\nu^K + (1 - e^{-\rho_0(K)t} p_K(\vec{n}))\,\delta_0\Big) \ll 1.$$

On utilise la condition nécessaire et suffisante d'existence et unicité de la QSD ainsi que la convergence en variation totale établie par N. Champagnat et D. Villemonais, 2016.

Il y a deux conditions.

Condition A1: Il existe deux nombres positifs b_1 et t_0 et une probabilité θ sur $\mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}$ telle que pour tout A de $\mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}$

$$\inf_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}} \mathbb{P}_{\vec{n}}\left(N_{t_0}^K \in A \,\middle|\, T_0 > t_0\right) \geq b_1\, \theta(A)\ .$$

Notez qu'en général θ n'est pas une QSD.

Dans notre cas, on prend la distribution uniforme sur $B(K\,\vec{x}_*, \sqrt{K})$.

Condition A2: il existe un nombre positif b_2 tel que

$$\mathbb{P}_\theta\left(T_0 > t\right) \geq b_2 \sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}} \mathbb{P}_{\vec{n}}\left(T_0 > t\right)\ .$$

Sous ces deux hypothèses on a existence et unicité de la QSD ν^K et

$$\sup_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d\backslash\{\vec{0}\}} d_{\mathrm{TV}}\left(\mathbb{P}_{\vec{n}}\big(N_t^K \in \cdot \;\big|\; T_0 > t\big)\,,\, \nu^K\right) \leq 2\,\big(1 - b_1\, b_2\big)^{t/t_0}\,.$$

On doit prouver que pour K suffisamment grand, les constantes b_1 et b_2 peuvent être choisies indépendamment de K et que

$$t_0 = \mathcal{O}(1)_d\; \log K\,.$$

La preuve repose sur la descente de l'infini, un bon choix de foncrion de Lyapounov et des bornes inférieures pour les probabilités de transition (mais le problème n'est génériquement pas auto-adjoint, pas d'inégalité de Harnack disponible ni de borne gaussienne connue).

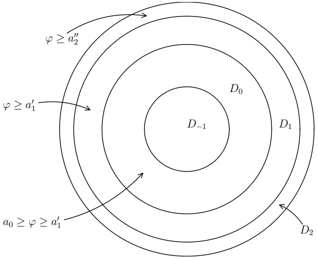
Estimation pour des temps d'entrée et de sortie

Notre fonction de Lyapounov:

$$\varphi(\vec{n}) = e^{\frac{\alpha}{K}\|\vec{n}-\vec{n}^*\|^2}.$$

Il existe $0 < \alpha < 1/2$ et $C > 0$ tels que

$$\mathcal{L}_K\varphi(\vec{n}) \leq \Big(-\alpha\beta\frac{\|\vec{n}\|}{K}\frac{\|\vec{n}-\vec{n}^*\|^2}{K} + C\Big)\varphi(\vec{n}).$$



Lemma

Let $D_{-1} \subsetneq D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}$ *, avec* D_2 *un compact et* $(D_2 \backslash D_1) \cap D_{-1} = \emptyset$ *. Supposons qu'il existe une fonction positive* φ *définie dans* $\mathbb{N}^d \backslash \{\vec{0}\}$ *telle que*

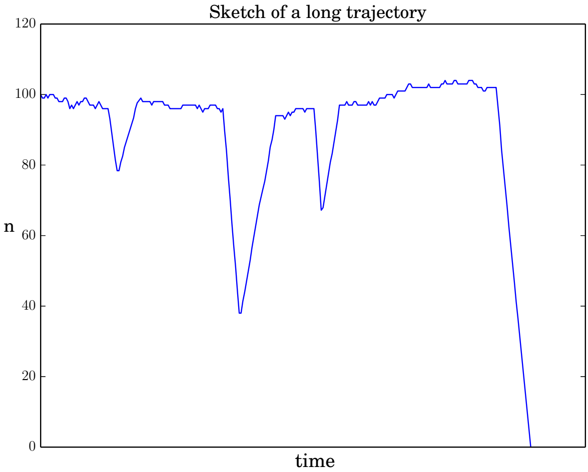
$$\Lambda = - \sup_{D_2 \backslash D_{-1}} \frac{\mathcal{L}_K \varphi(\vec{n})}{\varphi(\vec{n})} > 0.$$

Soit

$$a_0 = \sup_{\vec{n} \in D_0 \backslash D_{-1}} \varphi(\vec{n}) \,,$$
$$a_2'' = \inf_{\vec{n} \in D_2 \backslash D_1} \varphi(\vec{n}) \,,$$
$$a_1' = \inf_{\vec{n} \in D_1 \backslash D_{-1}} \varphi(\vec{n}) \,.$$

Alors

$$\inf_{\vec{n} \in D_0 \backslash D_{-1}} \mathbb{P}_{\vec{n}} \big(T_{D_{-1}} \leq t \,,\, T_{D_2 \backslash D_1} > T_{D_{-1}} \big) \geq 1 - \frac{a_0}{a_2''} - \frac{a_0}{a_1'} \, e^{-\Lambda \, t} \,.$$


Sketch of a long trajectory
120
100
80
60
40
20
0
n
time