# CM9 : Méthodes de calcul d'intégrales : intégration par parties

On note pour une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[a; b]$

$$\Big[f\Big]_a^b = f(b) - f(a).$$

**Théorème (Intégrations par parties)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables de dérivées continues sur $[a; b]$ :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ dt$$

# Un exemple

## Exemple

*Calculer* $\int_0^x t\cos(t)dt$. *On pose*

$$f'(t) = \cos(t) \quad f(t) = \sin(t)$$

$$g(t) = t \quad g'(t) = 1.$$

$$\int_0^x t\cos(t)dt = \Big[\sin(t)t\Big]_0^x - \int_0^x \sin(t)dt$$

$$\int_0^x t\cos(t)dt = \sin(x)x + \Big[\cos(t)\Big]_0^x$$

$$\int_0^x t\cos(t)dt = \sin(x)x + \cos(x) - 1.$$

## Exercice

*En utilisant la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculez :*

$$I_1 = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

# Une question

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est égale au

1. produit $\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$ pour toutes les fonctions $f$ et $g$, et tous les $a$, $b$;
2. produit $\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$ pour certaines fonctions $f$ et $g$ et certains $a$, $b$;
3. Je ne sais pas.

# Changement de variables

**Theorem**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $J$, contenant $a$ et $b$. Soit $u$ une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ contenant $\alpha$ et $\beta$ tels que $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$ et telle que $\forall x \in [\alpha; \beta] u(x) \in J$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx.$$

# En pratique

Pour calculer $\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx$ on pose $t = u(x)$ et $dt = u'(x)dx$, et on change les bornes de l'intégrale en posant $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$.

## Exemple

*Calcul de* $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$.
*Pour trouver u on se rappelle que* $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
*Si on pose* $t = \ln(x)$ *on a* $dt = \frac{1}{x}dx$.
*Pour les bornes* $a = \ln(1),\ b = \ln(2)$ *donc*

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} t\ dt = \frac{1}{2}\Big[\ln^2(2) - \ln^2(1)\Big]$$

*Donc*

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(2)}{2}$$

# Un autre exemple

Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$ on pose $t = u(x)$ et $dt = u'(x)dx$, on choisit $\alpha$ et $\beta$ tels que $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$.

**Exemple**

*Calcul de* $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$.
*On veut écrire* $1 - t^2$ *sous forme d'un carré, on pose* $t = \sin(x)$. *On a :*

$$1 - t^2 = \cos^2(x)$$

$(t \in [0;1])$.
*On peut prendre* $\alpha = 0$, *pour que* $\sin(\alpha) = 0$, *et* $\beta = \frac{\pi}{2}$ *pour que* $\sin(\beta) = 1$,

# Suite de l'exemple

## Exemple

$\sin : [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto [0;1]$ *de classe* $C^1$
$t = u(x) = \sin(x), \quad u'(x) = \cos(x)$ *ce qui donne* $dt = \cos(x)dx$.
$\sqrt{1-t^2} = |\cos(x)|$. *Pour* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geqslant 0$ *donc*

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

# Changement de variables pour les primitives

## Theorem

*Soit $u$ une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction continue sur $J = u(I)$ . Soit $F$ est une primitive de $f$ sur $J$ alors $F \circ u$ est une primitive de $u'(f' \circ u)$ sur $I$.*

## Démonstration.

En fait c'est la dérivée de la fonction composée $(F \circ u)'(x) = u'(x)f'(u(x))$. $\square$

## Exemple ($u$ est une fonction de $x$ :)

*On veut calculer une primitive de $\dfrac{1}{x \ln x}$. Ici $J = ]0, +\infty[$ On propose le changement de variable $u(x) = \ln(x)$ car $u'(x) = \dfrac{1}{x}$. On cherche $I$ tel que $u(I) = J$ . $I = ]1, +\infty[$ convient. On note $du = \frac{1}{x}dx$, qui est la nouvelle variable,*

## Exemple

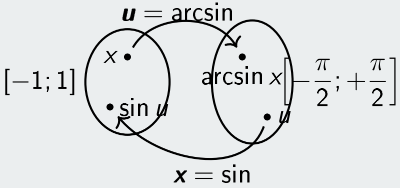
*On prend* $2 \in ]1, +\infty[$ *par exemple,*

$$\int_2^y \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln(2)}^{\ln(y)} \frac{1}{u}\, du = \ln(\ln y) - \ln(\ln(2))$$

*pour* $y > 1$. *Donc toutes les primitives de* $\dfrac{1}{x \ln x}$ *sur* $I = ]1, +\infty[$ *sont de la forme* $\ln(\ln x) + C$ . *On peut montrer que toutes les primitives de* $\dfrac{1}{x \ln x}$ *sur* $I = ]0, 1[$ *sont de la forme* $\ln(-\ln x) + C$, *en prenant* $u(x) = -\ln(x)$.

## Exemple ($x$ est une fonction de $u$ : $x(u)$)

*On veut calculer une primitive de* $\arcsin x$*. Ici* $I = [-1;1]$*. On pose* $x = \sin(u)$*, et* $dx = \cos(u)du$*. On a*




$$\begin{aligned}\int_0^y \arcsin x \; dx &= \int_0^{\arcsin(y)} \arcsin(\sin(u))\cos(u)du \\ &= \int_0^{\arcsin(y)} u\cos(u)du\end{aligned}$$

## Exemple

$$\int_0^y \arcsin x \, dx = \Big[\cos(u) + u\sin(u)\Big]_0^{\arcsin(y)}$$
$$= \cos(\arcsin(y)) \arcsin(y)y - 1$$

*pour* $y \in [-1;1]$. *Donc*

$$\int_0^y \arcsin x \, dx = \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y)y - 1$$

### Exercice

*En utilisant la formule de changement de variable ci-dessus, calculez :*

- *une primitive de* $\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)$
- *une primitive de* $\cos^2(x)\sin(x)$