

# Schémas conservatifs pour équations hyperboliques non linéaires

4.1

## Solutions discontinues

On est intéressé aux difficultés liées aux discontinuités.

Typiquement on se suppose d'avoir des solutions régulières.

En fait, les arguments sur la convergence et l'erreur de troncature sont basés sur l'hypothèse de régularité.

Maintenant, on essaie d'appliquer les schémas numériques qu'on a vu en cas où la donnée initiale est discontinue.

Par exemple, on considère le problème de Riemann:

$$(1) \begin{cases} u_t + a u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g & x < 0 \\ u_d & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

La solution de (1) exacte (faible) est  $u_0(x - at)$ , si maintenant on essaie d'utiliser des schémas numériques du type vu dans l'autre chapitre, on observe des problèmes au voisinage de la discontinuité.

En fait, si on remplace les dérivées par des D.F. on a:

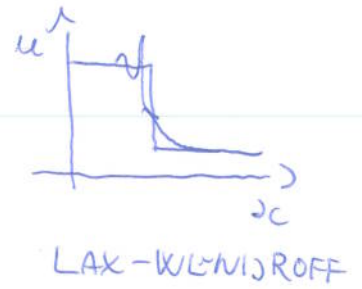
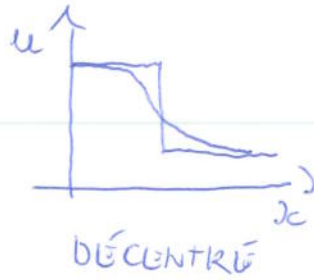
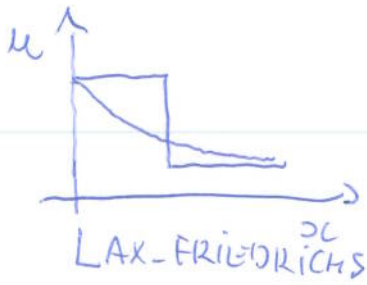
$$(2) \quad \frac{u(x+ht) - u(x-h,t)}{2h} = \frac{u_g - u_d}{2h} \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$$

Donc, l'erreur de troncature  $E_{h,15}$  ne tend pas vers zéro pour  $h \rightarrow 0$

On peut toujours montrer la convergence si on remplace  $u_0(x)$  en utilisant des approximations successives  $u_0^\varepsilon(x)$  régulières telles que  $u_0^\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mais la vitesse de convergence sera toujours inférieure à la vitesse à laquelle on s'attendait à l'ordre du schéma.

En plus la solution peut être "inexactement":

4.2



Les schémas de L-F et décentré donnent des solutions très diffusives, par contre le schéma de L-W est moins diffusive mais on observe l'apparition d'oscillations dans la solution. Si on raffine la grille les résultats ne changent pas qualitativement.

### La méthode des équations modifiées

Une technique pour étudier le comportement des solutions des équations aux différences est de modéliser l'équation aux différences par une équation aux dérivées partielles.

En fait, l'équation aux d.p. est obtenue à travers la discrétisation d'une EDP, mais on peut observer que les existent autres EDP que le schéma numérique résout mieux que l'équation de départ.

L'idée est que il est plus facile d'étudier le comportement qualitative d'une EDP que d'une équation aux d.p.

La dérivation de l'équation modifiée est liée à l'erreur de troncature  $E_{q,k}$  et à l'opérateur discret  $L_{q,k}$ .

On considère, par exemple, le schéma de L-F. On rappelle que l'erreur de troncature est:

$$(3) \quad E_{q,k} u(x,t) = O(k)$$

Si on considère au lieu de l'équation:

4.3

$$(4) \quad u_t + au_x = 0$$

l'équation

$$(5) \quad u_t + au_x + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) u_{tt} - \frac{\tau^2}{\Delta t} u_{xxx} = 0$$

On peut montrer que pour (5) l'erreur de troncature de ce schéma de L-F est  $\bar{E}_{\tau, \Delta t} u(x, t) = O(\tau^2)$  (exercice).

On peut conclure que la méthode de L-F est précise au second ordre par rapport à l'équation modifiée (5).

On peut exprimer  $u_{tt}$  en fonction des dérivées en espace, ce qui donne:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -a u_{tx} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) u_{xxt} - \frac{\tau^2}{\Delta t} u_{xxx} = \\ &= -a(-a u_{xx} + O(\tau)) + O(\tau) = a^2 u_{xx} + O(\tau) \end{aligned}$$

et finalement

$$(6) \quad u_t + au_x = \frac{\tau^2}{2\Delta t} \left( \text{Id} - \frac{\tau}{\Delta t} a^2 \right) u_{xx}$$

Donc l'équation modifiée est une équation d'advection-diffusion de la forme:

$$(7) \quad u_t + au_x = D u_{xx}$$

où  $D$  est positive, si la condition de stabilité du schéma L-F est satisfaite.

On s'attend que la solution de (7) soit diffusive pour temps grand, qui explique le comportement du schéma L-F. Observe que l'équation modifiée varie avec  $\tau$  et  $\Delta t$ . Le terme diffusif tend vers 0 quand  $\tau \rightarrow 0$ .

Les mêmes résultats et calculs sont vrais pour le schéma décentré.

4.4

### Deuxième ordre et dispersion

La méthode de L-W est du deuxième ordre pour l'équation

$$u_t + au_x = 0$$

mais ~~elle~~ est aussi une approximation du troisième ordre de l'équation modifiée (exercice):

$$(8) \quad u_t + au_x = \frac{h^2}{6} a \left( \frac{k^2}{h^2} aa^2 - Id \right) u_{xxx}$$

qui est une équation de la forme

$$(9) \quad u_t + au_x = \eta u_{xxx}$$

qui est une équation de dispersion. L'observation ~~importante~~ importante est que si on regarde la solution donnée par la série de Fourier de ~~l'équation~~ l'équation de dispersion, en posant  $u(x,t)$  de la forme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

On arrive à voir que les différentes composantes de la série se propagent à vitesses différentes. Donc pendant l'évolution temporelle les composantes oscillantes dispersent, comme on observe dans le cas de la solution numérique.

# Discrétisation des équations hyperboliques non linéaires (1)

4.5

## Présentation du problème

On cherche des méthodes pour approximer numériquement par différences finies le problème de Cauchy :

$$(10) \quad \begin{cases} \text{trouver } u(x,t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} P(u) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $P$  est une fonction strictement convexe (par exemple  $P(u) = \frac{u^2}{2}$  pour l'équation de Burgers).

On se donne un pas de discrétisation en espace  $h > 0$  et un pas de discrétisation en temps  $\Delta t > 0$ . On pose :

$$(11) \quad \begin{cases} x_j = jh, \quad j \in \mathbb{Z} \\ t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et on se propose de calculer une approximation  $v_j^n$  de  $u(x_j, t^n)$  ou de plutôt une approximation de  $\frac{1}{h} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} u(x, t^n) dx$ , où  $u$  est solution de (10).

Dans toute la suite, nous nous intéressons à des schémas explicites à un pas de temps et à trois pas d'espace qui s'écrivent :

$$(12) \quad v_j^n = H(v_{j-1}^{n-1}, v_j^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})$$

où  $H$  est une fonction régulière. Les schémas implicites sont difficiles à mettre en œuvre pour le problème non-linéaire.

## Schémas sous forme conservative

4.6

Nous avons vu que la forme conservative:

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(u)}{\partial x} = 0$$

et la forme non conservative:

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + P'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

des lois de conservation ne sont équivalentes que pour les solutions  $u$  régulières du problème et que la notion de solution faible repose sur la forme conservative de l'équation. On suit le même principe pour le calcul numérique d'une solution faible: On utilisera un schéma "sous forme conservative".

Le principe de base des schémas conservatifs est la méthode des volumes finis, qui vise à trouver une approximation de

$$(15) \quad u_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t) dx$$

à tous les temps  $t = t_n$ , où  $x_{j \pm \frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{h}{2}$ . Pour cela, on intègre tout d'abord l'équation (13) entre  $x_{j-\frac{1}{2}}$  et  $x_{j+\frac{1}{2}}$

$$(16) \quad \frac{d}{dt} u_j(t) + \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial P(u)}{\partial x} dx = 0$$

ou de manière équivalente

$$(17) \quad \frac{d}{dt} u_j(t) + \frac{P(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - P(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t))}{h} = 0$$

4.7

Le schéma numérique conservatif est une approximation de l'équation (17) : on approche la quantité  $f(u(x_{j+1/2}, t))$  en utilisant les  $u_j(t)$ . Un choix naturel consiste à rendre

$$(18) \quad \begin{aligned} f(u(x_{j+1/2}, t)) &\approx g(u_j(t), u_{j+1}(t)) \\ f(u(x_{j-1/2}, t)) &\approx g(u_{j-1}(t), u_j(t)) \end{aligned}$$

où  $g$  est le flux numérique que l'on peut définir.

Après une discrétisation en temps explicite, on obtient le schéma (13).

### Définition

On dit que le schéma (12) peut se mettre sous forme conservative s'il existe une fonction  $g$  régulière telle que :

$$(19) \quad v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h} (g(v_j^n, v_{j+1}^n) - g(v_{j-1}^n, v_j^n))$$

La fonction  $g$  est appelée le flux numérique du schéma.

On utilisera souvent la notation abrégée suivante :

$$(20) \quad v_j^{n+1} = v_j^n - \alpha (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n)$$

où

$$\begin{cases} \alpha = \Delta t / h \\ g_{j+1/2}^n = g(v_j^n, v_{j+1}^n) \end{cases}$$

L'importance de la forme conservative pour un schéma sera illustrée par le théorème de Lax-Wendroff. Mais, avant tout, il nous faut préciser sous quelle condition, partant sur le flux numérique, un schéma sous forme conservative est consistant avec l'équation (13).

## Consistance

4.8

Les notions d'erreur de troncature, de consistance et d'ordre, sont définies comme dans le cas linéaire. L'erreur de troncature du schéma (19) s'écrit :

$$(21) \quad \tilde{E}_j^h = \frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) + \frac{1}{h} (\bar{g}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{g}_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

où

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n) \\ \bar{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \bar{g}(v_j^n, v_{j+1}^n) \end{cases}$$

et  $\bar{u}$  est solution régulière de (13).

Remarquons en particulier que l'erreur de troncature se calcule à l'aide de solutions régulières de l'équation (13). Ces notions n'auront donc pas de sens au voisinage des chocs.

### Lemme

Un schéma mis sous forme conservative (19) est consistant avec l'équation (13) si et seulement si :

$$(23) \quad g(u, u) = p(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

il est alors d'ordre 1 au moins.

### Démonstration

Soit un schéma de Runge-Kutta :

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t (g_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

alors son erreur de troncature est

$$\tilde{E}_j^h = \frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_j^{n+1} - v_j^{n+1}) + \frac{1}{h} (\bar{g}_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n)$$



Où on a:

4.9

$$\begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n = \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) \\ \bar{u}_{j \pm 1}^n - \bar{u}_j^n = m h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) + O(h^2) \quad \text{avec } m = \pm 1 \end{cases}$$

d'où, si  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial w}$  désignent les 2 dérivées partielles de  $g$ :

$$\begin{cases} g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j \pm 1}^n) = g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) + \frac{\partial g}{\partial w}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) + O(h^2) \\ g(\bar{u}_{j \pm 1}^n, \bar{u}_j^n) = g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) + O(h^2) \end{cases}$$

On en déduit:

$$E_j^n = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + \left( \frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + O(h)$$

Le schéma est donc consistant  $\Leftrightarrow$ :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, u) + \frac{\partial g}{\partial w}(\bar{u}, u) = f'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

d'où l'égalité (23).

Insistons sur le fait qu'il existe des schémas consistants et non conservatifs.

### LE THÉORÈME de Lax-Wendroff

Nous allons démontrer un résultat important concernant les schémas sous forme conservative. Il exprime le fait que si un schéma sous forme conservative est consistant avec l'équation (13) converge, c'est nécessairement vers une solution possible du problème.

On suppose que la donnée initiale  $u_0$  du problème (10) a été discrétisée comme suit:

$$(24) \quad u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

où :

$$x_{j+\frac{1}{2}} = (j+\frac{1}{2})h \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

4.10

On construit alors, pour  $\Delta t$  et  $h$  donnés, une suite  $v^n = (v_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  par un schéma de la forme

$$(25) \quad v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h} (g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

Consistant avec l'équation (13), c'est-à-dire

$$g(u, u) = p(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

On note  $u_\Delta$  la fonction définie par :

$$(26) \quad u_\Delta(x, t) = v_j^n \quad \text{pour } x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}, \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

A chaque couple  $(\Delta t, h)$  correspond une fonction  $u_\Delta$ . On a alors le théorème suivant :

### théorème Lax-Wendroff

Supposons qu'il existe une suite  $(\Delta t_k, h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite de fonctions  $(u_{\Delta k})_{k \in \mathbb{N}}$  associées, et une fonction  $u$  telles que, pour tout domaine  $K$  borné de  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  :

(i)  $u \in L^\infty(K)$

(ii)  $u_{\Delta k} \rightarrow u$  dans  $L^\infty(K)$  quand  $k \rightarrow +\infty$

Alors  $u$  est une solution faible du problème (10).

Démonstration : Soit  $\varphi \in D(K)$ . On doit montrer que

$$(27) \quad \int_{-x}^{+x} \int_0^{t_0} (u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dt + \int_{-x}^{+x} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \varphi$$

Posons  $\varphi_j^n = \varphi(x_j, t_n)$ , pour  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En multipliant (25) par  $\varphi_j^n$

et en sommant, on obtient (on omet l'indice  $k$  pour alléger les notations):

$$h \sum_{j,n} (v_j^{2n} - v_j^n) \varphi_j^n + \Delta t \sum_{j,n} (g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n) \varphi_j^n = 0$$

Par sommation sur toutes, on obtient:

$$(28) \quad h \sum_{j,n} v_j^{2n} (\varphi_j^n - \varphi_j^{2n}) - h \sum_j v_j^0 \varphi_j^0 + \Delta t \sum_{j,n} g_{j+\frac{1}{2}}^n (\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (b_j - b_{j-1}) = a_n b_n - a_1 b_0 = \sum_{j=1}^n (a_{j+1} - a_j) b_j.$$

Si on note  $\varphi_\Delta$  et  $g_\Delta$  les fonctions définies sur:

$$\begin{cases} \varphi_\Delta(x,t) = \varphi_j^n & , x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}} , t_n \leq t < t_{n+1} \\ g_\Delta(x,t) = g_{j+\frac{1}{2}}^n & x_j \leq x < x_{j+1} , t_n \leq t < t_{n+1} \end{cases}$$

L'égalité (28) s'écrit aussi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Delta t}^{+\infty} u_\Delta(x,t) \frac{\varphi_\Delta(x,t-\Delta t) - \varphi_\Delta(x,t)}{\Delta t} dx dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u_\Delta(x,0) \varphi_\Delta(x,0) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_\Delta(x,t) \frac{\varphi_\Delta(x-\frac{h}{2},t) - \varphi_\Delta(x+\frac{h}{2},t)}{h} dx dt = 0$$

On vérifie alors facilement que la première intégrale converge vers:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) dx dt$$

et la seconde vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \varphi(x,0) dx$$

On remarque ensuite que  $g_\Delta$  vérifie tout de même:

$$g_\Delta(x,t) = g(u_\Delta(x-\frac{h}{2},t), u_\Delta(x+\frac{h}{2},t)) \quad \forall x, \forall t.$$

Donc  $g_\Delta$  converge uniformément sur tout compact vers la fonction  $g(u(x,t), u(x,t))$ , qui, d'après la consistance du schéma est identiquement égale à  $f(u(x,t))$ .

La troisième intégrale converge donc vers :

4.12

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(u(x,t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) dx dt$$

d'où le résultat (27).

Le théorème nous assure que les schémas sous forme conservative sont adaptés au calcul de solutions faibles.

Notons qu'un schéma qui ne peut pas s'écrire sous forme conservative peut très bien converger vers une fonction qui n'est pas solution faible du problème.

### Schémas entropiques

Un schéma sous forme conservative convergent ne converge pas toujours vers la solution entropique du problème.

Nous allons maintenant énoncer un critère (malheureusement difficile à vérifier en pratique) qui assure la convergence, si cette dernière a lieu, vers la solution entropique.

On rappelle tout d'abord que la solution entropique est caractérisée par le fait que elle satisfait la condition d'entropie

$$(28) \quad \frac{\partial S(u)}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \leq 0$$

Pour toute entropie  $(S, F)$ , c'est-à-dire pour tout couple de fonctions de classe  $C^1$ ,  $S$  étant strictement convexe et  $F$  étant définie par :

$$F'(u) = S'(u) p(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Nous sommes en mesure de définir la notion de consistance d'un schéma avec une condition d'entropie.

Définition Schéma consistant avec une condition d'entropie

Le schéma (19) est dit consistant avec la condition d'entropie (29) si et seulement si il existe une fonction  $G(u, v)$  telle que :

(i)  $G$  est consistante avec le flux d'entropie  $F$ ,

$$G(u, u) = F(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

(ii) Pour toute solution  $(v_j^n)$  de (19), on a

$$S_j^{2n} \leq S_j^n - 2 \left( G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

où l'on a pose :

$$\begin{cases} S_j^n = S(v_j^n) \\ G_{j+\frac{1}{2}}^n = G(v_j^n, v_{j+1}^n) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La fonction  $G$  est appelée le flux d'entropie numérique.

On peut alors établir, par une démarche analogue à celle suivie pour démontrer le théorème de Lax-Wendroff, le théorème suivant :

Théorème

Sous les hypothèses du théorème de L-W, si de plus le schéma considéré est consistant avec toute condition d'entropie alors la limite  $u$  est l'unique solution entropique du problème (10)

Ceci conduit finalement à définir les schémas entropiques

Définition

On dit que le schéma (19) est entropique s'il est consistant avec toute condition d'entropie.

Nous allons étudier une classe particulière de schémas numériques: 4.14

## Schémas monotones

### Condition de monotonie:

On a vu que l'opérateur qui à  $u_0$  associe la solution numérique est monotone. Autrement dit, si  $u$  et  $v$  sont les solutions pour les données initiales  $u_0$  et  $v_0$  du problème (10) on a:

$$(30) \quad u_0(x) \geq v_0(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x,t) \geq v(x,t) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

On s'intéresse aux schémas avec la même propriété:

### Définition

Un schéma est dit monotone si

$$(u_j^n \geq w_j^n, \forall j \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (v_j^{n+1} \geq w_j^{n+1}, \forall j \in \mathbb{Z})$$

Nous disposons d'un critère simple pour voir si un schéma est monotone ou pas:

### Lemme

Le schéma

$$(31) \quad v_j^{n+1} = H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n)$$

est monotone si et seulement si  $H$  est une fonction croissante de chacun de ses arguments.

Démonstration: immédiate.

En pratique, la fonction  $H$  dépend des pas de discrétisation  $\Delta t$  et  $h$  et la monotonie n'est réalisée que sous <sup>une</sup> condition sur  $\alpha = \frac{\Delta t}{h}$ , condition du type CFL.

Lemme

Soit un schéma monotone de la forme (31) et tel que  $H(u, u, u) = u$  par tout  $u \in \mathbb{R}$ . Alors:

i) il préserve la monotonie i.e.

$$\begin{cases} v_j^2 \leq v_{j+1}^n, \forall j \Rightarrow v_j^{2k} \leq v_{j+1}^{2k}, \forall j \\ v_j^2 \geq v_{j+1}^n, \forall j \Rightarrow v_j^{2k} \geq v_{j+1}^{2k}, \forall j \end{cases}$$

ii) il vérifie le principe de maximum suivant:

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 \leq v_{i_r}^{2k} \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2, \forall k \in \mathbb{Z}$$

iii) il est borné en norme  $l^\infty$ :

$$\|v^{2k}\|_\infty \leq \|v^2\|_\infty$$

où  $\|v^2\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^2|$

Démonstration

i) il suffit de poser  $w_j^2 = v_{j+1}^2$  (puis  $w_j^2 = v_{j-1}^2$ ) et appliquer la définition.

ii) De même, il suffit de poser:  $w_j^2 = \inf_{k \in \mathbb{Z}} v_k^2$  (puis  $w_j^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}} v_k^2$ )  $\forall j$  et appliquer la définition avec l'identité  $H(u, u, u) = u$ .

iii) est une conséquence directe de (ii).

En particulier, si la condition initiale est monotone, la solution construite calculée à l'aide d'un schéma monotone se comportera jamais d'oscillations.

Une propriété essentielle des schémas monotones est donnée par le théorème suivant que nous admettrons:

Théorème convergence

Soit un schéma sous forme conservative consistant avec (13) et monotone. Alors, de toute suite  $h_k$  tendant vers 0, on peut extraire une sous-suite telle que la suite de fonctions associées (~~est~~  $u_k$ ) converge presque partout vers une solution faible u du problème (10).

De plus

théorème

Un schéma sous forme conservative consistant avec (13) et monotone est entropique.

Démonstration

On considère un schéma de la forme suivante:

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

où  $H(u, v, w) = v - \alpha (g(v, w) - g(u, v))$ . On doit montrer qu'il est consistant avec toute condition d'entropie, mais on admettra qu'il suffit de considérer les entropies de Kruzkov qui sont de la forme:

$$(32) \quad \begin{cases} S(u) = |u - \tau| & \tau \in \mathbb{R} \\ F(u) = \text{signe}(u - \tau) (p(u) - p(\tau)) \end{cases}$$

DEFINITION ENTROPIE

1) après (31), il nous faut trouver une fonction  $G(u, v, w)$  telle que l'on ait:

$$(33) \quad G(v, v) = \text{signe}(v - \tau) (p(v) - p(\tau)) \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

et

$$(34) \quad |u_j^{n+1} - \tau| \leq |u_j^n - \tau| - \alpha (G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n))$$

pour toute solution  $(u_j^n)$  du schéma. Posons alors:

$$G(u, v) = g(u \vee \tau, w \vee \tau) - g(u \wedge \tau, w \wedge \tau)$$

où l'on a noté:

$$a \vee b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \wedge b = \min(a, b)$$



On a alors, puisque le schéma est consistant avec (13)

$$\begin{aligned} G(u, v) &= g(uv_k, uv_k) - g(u1_k, u1_k) \\ &= f(uv_k) - f(u1_k) = \\ &= 2 \operatorname{sign}(v-k) (f(u) - f(1)) \end{aligned}$$

L'identité (33) est donc vérifiée.

Posons alors  $w_j^2 = v_j^2 v_k$ . Comme le schéma est monotone :

$$\begin{cases} w_j^2 \geq v_j^2 \quad \forall j \Rightarrow H(w_{j+1}^2, w_j^2, w_{j+k}^2) \geq v_j^{2k} \\ w_j^2 \geq 1 \quad \forall k \Rightarrow H(w_{j+1}^2, w_j^2, w_{j+k}^2) \geq H(1, 1, 1) = 1 \end{cases}$$

d'où :

$$(35) \quad H(v_{j+1}^2 v_k, v_j^2 v_k, v_{j+k}^2 v_k) \geq v_j^{2k} v_k$$

De même l'inégalité suivante :

$$(36) \quad H(v_{j+1}^2 1_k, v_j^2 1_k, v_{j+k}^2 1_k) \leq v_j^{2k} 1_k$$

est vraie.

Donc, comme  $|u-k| = uv_k - u1_k$ , on déduit de (35) et (36) que :

$$|v_j^{2k} - 1| \leq H(v_{j+1}^2 v_k, v_j^2 v_k, v_{j+k}^2 v_k) - H(v_{j+1}^2 1_k, v_j^2 1_k, v_{j+k}^2 1_k)$$

et cette dernière inégalité coïncide avec (34).

Malheureusement, la portée des schémas monotones est limitée par leur ordre.

### théorème

Un schéma sous forme conservative consistant avec (13) et monotone est d'ordre 1.

Démonstration: On considère un schéma de la forme :

$$v_j^{2k} = H(u_{j+1}^2, v_j^2, u_{j+k}^2)$$

où  $H(u, v, w) = v - \alpha (g(v, w) - g(u, v))$ .

1) Soit  $\bar{u}$  une solution régulière de (13). On vérifie que 4.18

l'erreur de troncature s'écrit:

$$E_J^h = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right]_J^2 + \frac{h^2}{24\Delta t} \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{u}) \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]_J^2 + O(h^4)$$

En dérivant (13) nous avons:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial x} (\beta \bar{u}) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} (\beta \bar{u}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(\bar{u})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)$$

Ainsi, l'erreur de troncature s'écrit finalement:

$$E_J^h = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta(\bar{u}, \alpha) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]_J^2 + O(h^2)$$

où

$$\beta(\bar{u}, \alpha) = \alpha(\bar{u}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{u}) \right)$$

2) Le schéma étant monotone, on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}(u, u) = 2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial H}{\partial v}(u, u) = 1 - 2 \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial H}{\partial w}(u, u) = -2 \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$  = dérivée partielle par rapport à la première variable et

$\frac{\partial g}{\partial v}$  = dérivée partielle par rapport à la deuxième variable.

On a donc finalement:

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) \geq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \leq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

3) Le schéma étant consistant, on a:

$$g(u, u) = \rho(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$(38) \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = \alpha(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

De (37) et (38) on déduit:

4.19

$$\alpha(u) \leq \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) \right)^2$$

Donc  $\beta(u, v)$  est toujours négatif ou nul.

Pour que le schéma soit d'ordre supérieur ou égal à 2, il faut que  $\beta(u, v)$  soit nul pour tout  $u$ .

D'après ce qui précède, il faut pour cela que l'on ait:

$$\left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) \right)^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) \right)^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) = \frac{1}{2}$$

Ceci n'est vrai que si:

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, u) = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) = 0$$

où

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, u) = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial v}(u, u) = 0$$

Plaçons nous par exemple dans le ~~cas~~ premier cas.

D'après (38) on a alors:

$$\alpha(u) = \frac{1}{2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Il s'agit donc du cas linéaire de l'équation de transport avec la vitesse  $\frac{1}{2}$ . Le schéma s'écrit:

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n,$$

et il est exact car il coïncide avec la méthode des caractéristiques.

Ainsi nous avons démontré qu'un schéma monotone est d'ordre 1 exactement, sauf si  $\beta(u) = cu$  et  $c \frac{\Delta t}{h} \geq 1$  auquel cas il est d'ordre  $\infty$ .

## Exemples

4.20

Nous allons illustrer les différents exemples de schémas pour les équations hyperboliques non-linéaires.

### Le schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax dans le cas linéaire s'étend de manière naturelle au cas non-linéaire sous la forme:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\alpha}{2}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))$$

Le schéma de L-F possède les propriétés suivantes:

a) Conservatif. On vérifie aisément que il peut se mettre sous la forme conservative; avec pour flux numérique:

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) + \frac{1}{2}(u - v)$$

b) Consistent. Le schéma est consistant d'ordre 1 au moins. En effet:

$$g(u, u) = \frac{1}{2}(f(u) + f(u)) - \frac{1}{2}(u - u) = f(u)$$

c) Monotone Or a :

$$H(u, v, w) = \frac{1}{2}(u + w) - \alpha(f(u) - f(w))$$

D'où

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} a(u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial w}(u, v, w) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} a(w)$$

Par conséquent, le schéma de L-F est monotone et donc doit vérifier a priori la condition  $\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w) \geq 1$   $\forall u, v, w$ .

## Le schéma d'Engquist-Osher

4.21

Il est défini comme suit :

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( p(v_{j+1}^n) - p(v_j^n) + \int_{v_{j-1}^n}^{v_j^n} |a(\varphi)| d\varphi - \int_{v_j^n}^{v_{j+1}^n} |a(\varphi)| d\varphi \right)$$

où l'on a noté  $a$  la dérivée de  $p$ .

On retrouve le schéma décentré à gauche dans les zones où  $p$  est croissante et à droite lorsque  $p$  est décroissante.

Le schéma d'Engquist-Osher possède les propriétés suivantes :

a) Conservatif. Il peut s'écrire sous forme conservative à condition de poser :

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left( p(u) + p(v) - \int_u^v |a(\varphi)| d\varphi \right)$$

b) Consistent. On vérifie aisément que  $p(u) = g(u, u)$ . Le schéma de E-O est donc consistant et d'ordre 1 au moins.

c) Monotone. On a

$$H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( p(w) - p(u) + \int_u^v |a(\varphi)| d\varphi - \int_v^w |a(\varphi)| d\varphi \right)$$

1) où

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w) = \frac{\Delta t}{\Delta x} a(u) + \frac{\Delta t}{\Delta x} |a(u)|$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |a(v)|$$

$$\frac{\partial H}{\partial w}(u, v, w) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} a(w) + \frac{\Delta t}{\Delta x} |a(w)|$$

Par conséquent, le schéma d'E-O est monotone sous la condition de stabilité

$$\sup_{1 \leq j \leq N} |a(u_j^{n+1})| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## Le schéma de Murman-Roe

4.22

Il est naturel de vouloir étendre au cas non-linéaire le schéma d'écoulement. On considère par exemple le schéma suivant, appelé de Murman-Roe

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta \left( g(v_j^n, v_{j+1}^n) - g(v_{j-1}^n, v_j^n) \right)$$

où

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left( p(u) + p(v) + a(u, v)(u - v) \right)$$

avec

$$a(u, v) = \begin{cases} \frac{p(u) - p(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ p'(u) & \text{si } u = v \end{cases}$$

Comme le schéma de E-O, ce schéma coïncide avec le schéma d'écoulement lorsque  $p$  est monotone.

Le schéma de Murman-Roe possède les propriétés suivantes :

- Conservatif. On remarque que le schéma de M-R est déjà sous forme conservative avec  $g$  le flux numérique.
- Consistant. Il est consistant car  $g(u, u) = p(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .
- Non caractéristique et donc non monotone.

Par exemple supposons que on veuille résoudre numériquement à l'aide de ce schéma le problème (10) avec donnée initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Où  $u_g$  et  $u_d$  sont tels que :  $p(u_g) = p(u_d)$  (Par exemple  $u_g = -1$ ,  $u_d = 1$  et  $p(u) = u^2/2$ ). Pour la donnée initiale discrète suivante

$$\text{avec } v_j^0 = \begin{cases} u_g & \text{si } j \leq 0 \\ u_d & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

Le schéma de M-R fournit une solution discrète stationnaire :

$$v_j^n = v_j^0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En effet on a :

4.23

$$g(u_y, u_y) = g(u, u) = g(u_y, u) = g(u, u_y) = P(u_y) = P(u).$$

Ainsi, le schéma de M-R permet de calculer une solution du problème donnée par :

$$u(x, t) = u_0(x) \quad \forall t \geq 0$$

c'est une solution faible car la relation de R-H est satisfaite.

Si  $u_y > u$ , il s'agit bien de la solution entropique. En revanche, si  $u_y < u$ , on voit que la solution entropique correspond à un onde de détente. Le schéma de M-R ne permet pas de sélectionner la solution entropique.

### Le schéma de Lax-Wendroff

Nous allons construire un schéma d'ordre 2.

Un développement limite en temps nous donne

$$(39) \quad \bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3)$$

avec  $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n)$  solution régulière de (1b).

De l'équation (43) on déduit :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial x} P(\bar{u}) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} P(\bar{u}) \right)$$

Donc l'équation (39) devient :

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} P(\bar{u}) \right]_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} P(\bar{u}) \right) \right]_j^n + O(\Delta t^2)$$

Où la notation  $[ \cdot ]_j^n$  signifie que l'on calcule les quantités entre les crochets au point  $x_j$  et au temps  $t_n$ .

Mais alors, es-ente de développer les termes entre crochets.

4.24

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (p(u)) \right]_j^n = \frac{p(\bar{u}_{j+1}^n) - p(\bar{u}_{j-1}^n)}{2h} + O(h^2)$$

Pour le second terme, on applique deux fois en succession l'ordre pour obtenir une approximation d'ordre 2:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(u) \frac{\partial}{\partial x} p(u) \right) \right]_j^n &= \frac{1}{2h} \left( \left[ a(u) \frac{\partial}{\partial x} p(u) \right]_{j+\frac{1}{2}}^n - \left[ a(u) \frac{\partial}{\partial x} p(u) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2h} \left( a_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{p(\bar{u}_{j+1}^n) - p(\bar{u}_j^n)}{h} - a_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{p(\bar{u}_j^n) - p(\bar{u}_{j-1}^n)}{h} \right) + O(h^2) \end{aligned}$$

où l'on a posé:  $a_{j+\frac{1}{2}}^n = a\left(\frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2}\right)$

On obtient finalement le schéma du second ordre suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (p_{j+1}^n - p_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} \left( a_{j+\frac{1}{2}}^n (p_{j+1}^n - p_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n (p_j^n - p_{j-1}^n) \right)$$

avec

$$p_j^n = p(u_j^n) \text{ et } a_{j+\frac{1}{2}}^n = a\left(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}\right)$$

Le schéma de L-W possède des propriétés suivantes:

a) Conservatif. Le schéma de L-W peut s'écrire sous forme conservative et son flux numérique est donné par:

$$g(u,v) = \frac{1}{2} \left( p(u) + p(v) - \alpha a\left(\frac{u+v}{2}\right) (p(u) - p(v)) \right)$$

b) Consistent. On vérifie facilement que  $g(u,u) = f(u)$

c) Non entropique et donc non monotone. On peut montrer qu'il n'est pas entropique en suivant la même démarche que pour le schéma de Hermas-Lee.



## Un exemple fondamental: LE SCHEMA DE GODUNOV

4.25

La démarche de construction de ce schéma repose sur la résolution exacte des problèmes de Riemann locaux.

La construction de  $u^{n+1}$  à partir de  $u^n$  se fait en deux étapes:

1) Première étape: on note  $w^n(x)$  la fonction définie par:

$$(\#0) \quad w^n(x) = v_j^n \quad \text{si } x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}$$

où  $x_{j \pm \frac{1}{2}} = (j \pm \frac{1}{2}) \Delta x$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .

On calcule alors une solution entropique du problème suivant:

$$(\#1) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(w) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in (t^n, t^{n+1}) \\ w(x, t^n) = w^n(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On montre que le problème peut être résolu de façon exacte si la condition suivante est vérifiée:

$$(\#2) \quad \max_{j \in \mathbb{Z}} |a(v_j^n)| \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{avec } p'(v^n) = a(v^n)$$

2) Deuxième étape: On définit  $u^{n+1}$  comme projection de  $w^n$  sur les fonctions constantes par morceaux:

$$(\#3) \quad v_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} w^n(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Lemme Sous la condition (#2), la solution du problème (#1) est

donnée par:

$$(\#4) \quad w^n(x, t) = w_R \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t^n}; v_j^n, v_{j+1}^n \right) \quad \text{si } x_j < x < x_{j+1}$$

où  $w_R \left( \frac{x}{t}; u_g, u_d \right)$  est la solution du problème de Riemann pour les états  $(u_g, u_d)$ .

## Démonstration

4.15

Le problème (41) consiste en une succession de problèmes de Riemann de la forme

$$(P_j) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 & x \in (x_j, x_{j+1}), t \in [t^j, t^{j+1}] \\ w(x_j, t_j) = \begin{cases} v_j^2 & \text{si } x < x_{j+1/2} \\ v_{j+1}^2 & \text{si } x > x_{j+1/2} \end{cases} \end{cases}$$

L' solution de ce problème pour  $x \in \mathbb{R}$  est donnée par :

$$(45) \quad w(x, t) = w_R \left( \frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_j}; v_j^2; v_{j+1}^2 \right)$$

Il s'agit d'une onde de détente si  $v_j^2 < v_{j+1}^2$  et d'un choc dans le cas contraire. La "juxtaposition" de solutions de la forme (45) définit bien la solution de (41) si les différents problèmes n'ont pas interagis avant l'instant  $t_{n+1}$ .

Autrement dit, il faut que la solution  $w$  de chacun des problèmes  $(P_j)$  vérifie :

$$\begin{cases} w(x_j, t) = v_j^2 & \forall t \in [t^j, t^{j+1}] \\ w(x_{j+1}, t) = v_{j+1}^2 \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore :

$$\begin{cases} w_R \left( -\frac{e_j}{2t}; v_j^2; v_{j+1}^2 \right) = v_j^2 \\ w_R \left( \frac{e_j}{2t}; v_j^2; v_{j+1}^2 \right) = v_{j+1}^2 \end{cases} \quad \forall t \in [0, \Delta t]$$

et ceci est automatiquement vérifié sous la condition :

$$\frac{e_j}{2\Delta t} \geq \max(|u(v_j^2)|, |u(v_{j+1}^2)|)$$

Autrement dit, la vitesse de propagation de la solution ( $v_j$ )

427

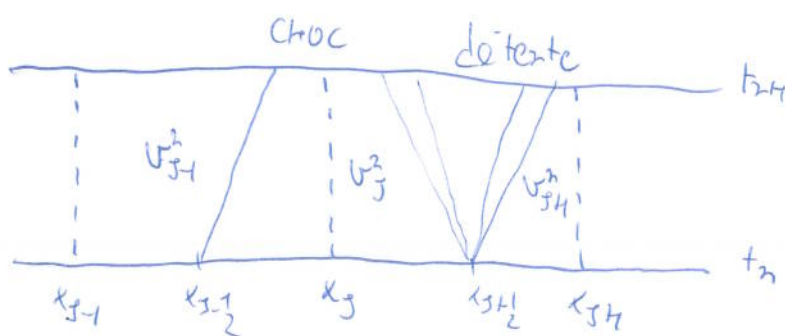
étant:

$$v_j = \max(|a(u_j^h)|; |a(u_{j+1}^h)|)$$

l'onde de choc ou l'onde de détente n'auront pas atteint les bornes de l'intervalle  $x_j, x_{j+1}$  avant l'instant:

$$T_j = t_n + v_j \frac{h_j}{2}$$

il suffit donc de choisir  $t_{n+1}$  tel que:  $t_{n+1} \leq T_j, \forall j \in \mathbb{Z}$



Le schéma de Godunov possède les propriétés suivantes:

a) Conservatif.

Lemme

- i) L'application  $q \rightarrow p(w_R(q; u, v))$  est continue en 0, quels que soient  $u$  et  $v$ .
- ii) Le schéma de Godunov peut s'écrire sous forme conservative et sa flux numérique est donné par:

$$(45) \quad p(u, v) = p(w_R(0; u, v))$$

Démonstration

- i) On veut que l'application  $q \rightarrow w_R(q; u, v)$  est continue partout sauf en  $q = \frac{p(u) - p(v)}{u - v}$  si  $u > v$  (choc). Donc elle est continue en 0 sauf si  $u > v$  et  $p(u) = p(v)$ .

Il dans ce cas  $w_R(0; u, v) = u$  et  $w_R(0^+; u, v) = v$ .

D'où  $p(w_R(0; u, v)) = p(u) = p(v) = p(w_R(0^+; u, v))$ .

ii) Intégrons l'équation (41) sur la maille

4.25

$$[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$$

On a:

$$0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) dx dt$$

A priori cette écriture a de sens que si la maille considérée n'est pas traversée par une ligne de choc. Dans le cas contraire, il faudrait intégrer de part et d'autre du choc. Cependant, comme  $u$  satisfait la relation de R-H, l'intégrale sur la ligne de choc est nulle. Tout se passe donc comme si  $u$  était régulière.

On a alors:

$$0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (p(u(x_{j+1/2}, t)) - p(u(x_{j-1/2}, t))) dt$$

d'où en vertu de (43) et (44) et de (42):

$$0 = h (v_j^{n+1} - v_j^n) + \Delta t (p(u_R(0; v_j^n, v_{j+1}^n)) - p(u_R(0; v_{j-1}^n, v_j^n)))$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

b) Consistent d'ordre 1. En utilisant (45) on remarque que  $\eta(u, u) = p(u)$  et donc que le schéma de Godunov est consistant d'ordre 1 au moins. Comme il est monotone, il est d'ordre 1 exactement.

c) Monotone et donc entropique. Le schéma de Godunov est monotone. En effet, la première étape qui consiste en une résolution exacte du problème de Riemann est monotone, la seconde étape l'est trivialement.