

SCHEMAS AUX DIFFERENCES FINIES POUR

3.1

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES D'ORDRE 1

L'inconnue est une fonction u définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

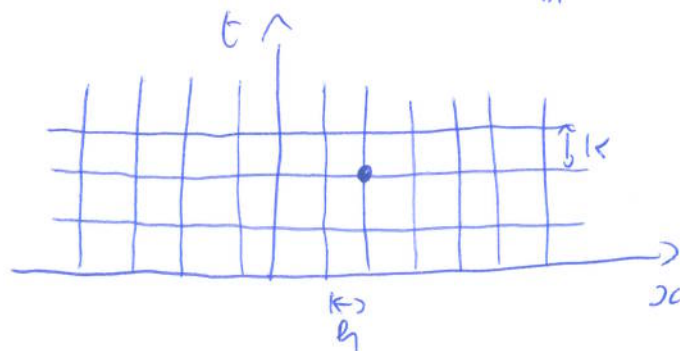
Le domaine de définition de u est discrétisé par la grille

$$G_{h,k} = \left\{ (x_m, t_n) ; x_m = mh, m \in \mathbb{Z}, t_n = nk, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ avec } h, k \in \mathbb{R}_+^* \text{ petits}$$

La fonction u prend la valeur $u_m^n = u(x_m, t_n)$ au point (x_m, t_n) de la grille $G_{h,k}$. On va noter v la solution numérique qui est définie uniquement sur $G_{h,k} : (v_m^n)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$.

Donc v_m^n est la solution approchée au point (x_m, t_n) de l'eq.

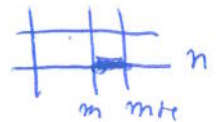
Lorsque (m,n) parcourt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, le point (x_m, t_n) parcourt la grille



Pour obtenir un problème discret on remplace les dérivées partielles par des différences finies :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$$

décentrée à droite



$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$$

décentrée à gauche



$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}$$

centrée



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

centrée d'ordre deux

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k}$$

différence finie progressive est.

Les approximations sont obtenues grâce à la formule de Taylor. 3.2

Exemple:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On va discrétiser cette équation en utilisant un schéma progressif en temps et décentré à droite en espace:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

En posant $\lambda = \tau/h$ on obtient:

$$u_m^{n+1} = (1 + \lambda a) u_m^n - \lambda a u_{m-1}^n = (1 + \lambda a - \lambda a \tau_{-h}) u_m^n$$

où $\tau_{-h} u(x, t) = u(x-h, t)$; τ_d , $d \in \mathbb{R}$ est l'opérateur de translation spatiale. On a la récurrence:

$$\begin{aligned} u_m^n &= (1 + \lambda a - \lambda a \tau_{-h})^n u_m^0 = \sum_{p=0}^n C_n^p (1 + \lambda a)^{n-p} (-\lambda a \tau_{-h})^p u_0(x_m) = \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p (1 + \lambda a)^{n-p} (-\lambda a)^p u_0(x_m + p h) \quad ; \quad C_n^p = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Ainsi le domaine de dépendance de u au point (x_m, t_n) est donné par les points $x_m, x_m+h, x_m+2h, \dots$. Or, on sait que $u(x, t) = u_0(x-at)$ et donc que le domaine de dépendance de $u_m^n = u(x_m, t_n)$ est restreint au point $x_m - a n h$. Le schéma ne peut pas être convergent.

On constate que bien qu'il semble facile de remplacer les dérivées partielles par des différences finies, il faut toujours garantir que la solution donnée par un schéma aux différences finies converge, en un sens à définir, vers une solution de l'edp.

On n'a pas tenu compte d'éventuelles conditions au bord.

3.3

De plus, étant donnée la mémoire limitée d'un ordinateur on est obligé de se restreindre à une grille spatiale finie $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$.

En x_0 et x_m on introduit alors des contraintes qui dépendent du type de condition au bord que on veut imposer.

Les conditions au bord numériques sont nécessaires pour pouvoir déterminer u_m^{n+1} pour $0 \leq m \leq M$. Exemple: eq. de transport sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ $\Rightarrow u(0,t) = \psi(t), t;$
 $u_0^n(t) = \gamma(t)$

Dans ce qui suit nous n'insisterons pas sur les problèmes posés par ces contraintes.

CONVERGENCE, CONSISTANCE ET STABILITÉ.

Définitions:

L est un opérateur différentiel linéaire qui est d'ordre 1 en t et en x .

$$(5.1) \begin{cases} Lu(x,t) = P(x,t) & x \in \mathbb{R}_x^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \text{ ouvert de } \mathbb{R}. \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées partielles par des différences finies on obtient $L_{h,t}$. Pour tenir compte du second membre on utilise un opérateur discret $I_{h,t}$ que l'on applique à P .

Un schéma aux différences finies s'écrit:

$$L_{h,t} v = I_{h,t} f$$

$I_{h,t} P = P_m^n$ et la condition initiale est donnée par $v_m^0 = u_0(x_m)$.

Définition 3.1 :

3.4

• Un schéma aux diff. linies est explicite si on peut écrire v_m^{n+1} comme combinaison linéaire des v_i^j son.

Le schéma est dit implicite si d'autres valeurs de v sont nécessaires v_{xi}^{n+1} .

• Un schéma aux diff. linies est à un pas de temps s'il utilise les valeurs de v à deux instants seulement : par exemple t_2, t_{2+1} .

Le schéma est à pas multiples si la valeur de v à plus de deux instants intervient.

Définition 3.2 (convergence) :

Soit $u(x,t)$ la solution de (5.1) et v une solution du schéma discret $L_{h,t} v = P_m^n$ telle que v_m^n converge vers $u_0(x)$ quand x_m converge vers x .

On dit que le schéma aux diff. linies $L_{h,t}$ est un schéma convergent si v_m^n converge vers $u(x,t)$ quand (x_n, t_n) converge vers (x, t) pour (h, τ) tendant vers $(0,0)$.

Vérifier que le schéma utilisé est convergent est en général difficile. On va proposer dans la suite des critères plus facile à vérifier.

Définition 3.3 (consistance) :

On dit que le schéma $L_{h,t} v = P_m^n$ est consistant avec l'ed1 $Lu = P$ si pour toute fonction φ de classe C^∞ on a exactement point (x_m, t_n) :

$$\lim_{(h,\tau) \rightarrow (0,0)} (L\varphi - L_{h,t}\varphi) = 0$$

La consistance entraîne l'exactitude qu'une solution régulière de l'ed1 est une solution du schéma aux diff. linies quand le pas de discrétisation tend vers 0. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

En effet considérons de nouveau le schéma:

3.5

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \alpha \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \quad \alpha > 0$$

et soit $\varphi \in C^\infty$ on a

$$L\varphi = \varphi_t + \alpha \varphi_x \text{ et } L_{h,\tau} \varphi = \frac{\varphi_m^{n+1} - \varphi_m^n}{\tau} + \alpha \frac{\varphi_{m+1}^n - \varphi_m^n}{h}$$

Grâce à la formule de Taylor:

$$\varphi_m^{n+1} = \varphi(x_m + h, t_n) = \varphi_m^n + h \varphi_x(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2} \varphi_{xx}(x_m, t_n) + O(h^3)$$

$$\varphi_m^{n+1} = \varphi(x_m, t_n + \tau) = \varphi_m^n + \tau \varphi_t(x_m, t_n) + \frac{\tau^2}{2} \varphi_{tt}(x_m, t_n) + O(\tau^3)$$

On en déduit que:

$$L_{h,\tau} \varphi(x_m, t_n) = \varphi_t(x_m, t_n) + \alpha \varphi_x(x_m, t_n) + \frac{1}{2} (\tau \varphi_{tt}(x_m, t_n) + \alpha h \varphi_{xx}(x_m, t_n)) +$$

$$+ O(h^2) + O(\tau^2)$$

et donc

$$(L\varphi - L_{h,\tau} \varphi)(x_m, t_n) = -\frac{1}{2} (\tau \varphi_{tt}(x_m, t_n) + \alpha h \varphi_{xx}(x_m, t_n)) + O(h^4) + O(\tau^4) \rightarrow 0$$

$$(h,\tau) \rightarrow (0,0)$$

Le schéma est bien consistant mais pas convergent.

On a donc besoin d'une condition supplémentaire pour garantir la convergence.

Définition 3.4: (Stabilité)

Le schéma aux différences linéaires $L_{h,\tau} u = 0$, associé à l'équation aux dérivées partielles $Lu = 0$, est stable s'il existe $\mathcal{L} \subset (\mathbb{R}_+^2)^2$ avec $(0,0) \in \mathcal{L}$, tel que pour tout $T > 0$ il existe une constante C_T tel que

$$h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_m^0|^2$$

pour tous $(h,\tau) \in \mathcal{L}$ et $(h,\tau) \in \mathcal{L}$.

On dit que \mathcal{L} est la région de stabilité du schéma.

exemple

\mathcal{L} est le segment $\{(h, \tau) : 0 < h < c\}$ avec c et τ constantes positives.

le cône $\{(h, \tau) : 0 < c_1 h < \tau < c_2 h < c_3\}$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+^*$.

La définition de stabilité utilise une norme sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$, l'espace des suites réelles ou complexes indexées sur \mathbb{Z} . 3.6

Normes discrètes et continues

• Normes continues = normes sur les espaces fonctionnels

a) sur $L^2(\mathbb{R})$: $\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

b) sur $L^\infty(\mathbb{R})$: $\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$

c) sur $L^p(\mathbb{R})$: $\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$ $1 \leq p < \infty$

• Normes discrètes: normes sur l'espace des suites réelles ou complexes

a) sur l^2 $\|v\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|v\|_{2, \mathbb{Z}} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^2 \right)^{1/2}$

b) sur l^∞ $\|v\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \|v\|_{\infty, \mathbb{Z}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$ (indépendant de h)

c) sur l^p $\|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \|v\|_{p, \mathbb{Z}} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$

—

Donc

$(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{Z})$ si $\|v\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^2 \right)^{1/2}$ est fini.

Le critère de stabilité s'écrit alors, pour h et t suffisamment petits :

$$\forall T > 0 \exists C_T > 0 \text{ t.q. } \forall t_n \in [0, T] \text{ on a } \|v^{t_n}\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C_T \|v^0\|_{l^2(\mathbb{Z})}$$

La stabilité garantit qu'à chaque instant $t_n \in [0, T]$ la norme de la solution discrète est bornée, à un facteur constant près, par la norme des données initiales.

L'importance des notions de consistance et stabilité est due au théorème de Lax.

Théorème 1 (Lax)

3.7

Un schéma linéaire, consistant avec le problème (5.1), est convergent si et seulement si il est stable.

La dernière définition que l'on va introduire permet de distinguer les schémas convergents, en effet les schémas n'ont pas nécessairement les mêmes performances pour l'approximation de la solution.

Définition 3.5

Un schéma $L_{q,p} v = \rho_m$ consistant avec le problème (5.1) est d'ordre p en espace et q en temps si, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty$:

$$\mathbb{E}_{q,p} \varphi = L_{q,p} \varphi - L \varphi = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q).$$

On dit que le schéma est d'ordre (p,q) et $\mathbb{E}_{q,p}$ est appelée l'erreur de troncature du schéma.

Exemple:

Sans démontrer le théorème de Lax nous allons illustrer comment la stabilité et la consistance interviennent dans la convergence d'un schéma.

On utilise le schéma: $v_m^{n+1} = (1 + \lambda a) v_m^n - \lambda a v_{m+1}^n$ où $\lambda = k/h$ et $a < 0$.
Pour $x = mh$ on a $e(x, t_n) = u(x, t_n) - v_m^n$ c'est l'erreur commise par le schéma au point (x, t_n) .

Alors $L_{q,p} e = L_{q,p} u = \mathbb{E}_{q,p} u$ car v est solution de $L_{q,p} v = 0$ et u est solution de $Lu = 0$. D'où:

$$e(x, t_{n+1}) = (1 + \lambda a) e(x, t_n) - \lambda a e(x+h, t_n) + k \mathbb{E}_{q,p} u(x, t_n)$$

et

$$\sup_x |e(x, t_{n+1})| \leq (|1 + \lambda a| + |\lambda a|) \sup_x |e(x, t_n)| + k \sup_x |\mathbb{E}_{q,p} u(x, t_n)|$$

On a ainsi mesuré l'erreur à l'instant t_n grâce à l'équation 3.8 à l'instant t_n et l'erreur de troncature en t_n . Par récurrence :

$$\sup_x |e(x, t_n)| \leq (1 + k\Delta t)^n \sup_x |e(x, 0)| + k \sum_{p=1}^n (1 + k\Delta t)^{n-p} \sup_x |\tilde{e}_{q,p} u(x, t_{p-1})|$$

Comme l'on verra plus loin l'analyse de von Neumann

permet de montrer que le schéma est stable si et seulement si $k \leq 1$ tel que $-1 \leq k\Delta t \leq 0 \Rightarrow |1 + k\Delta t| + |k\Delta t| = 1$. Comme de plus $e(x, 0) = 0$ et

$$\sup_x |e(x, t_n)| \leq k \sum_{i=0}^{n-1} \sup_x |\tilde{e}_{q,i} u(x, t_i)|$$

On doit maintenant évaluer l'erreur de troncature. Le schéma utilisé est d'ordre $(1, 1)$, de plus $\tilde{e}_{q,i} u(x, t_i) = L_{q,i} u(x, t_i) - (L_{q,i} u - Lu)(x, t_i) = O(\Delta t^2)$ car $k = \Delta t$. On a

$$|\tilde{e}_{q,i} u(x, t_i)| = |L_{q,i} u_0(x - \alpha t_i)| = \left| \frac{\Delta t}{2} \alpha^4 u_0^{(4)}(\xi_1) + \frac{15}{2} \alpha^2 \Delta t^3 u_0^{(4)}(\xi_2) \right| \leq k C \sup_x |u_0^{(4)}|$$

et finalement $\forall n \leq T/\Delta t$:

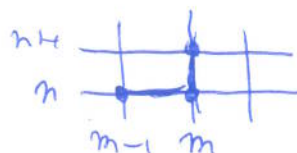
$$\|e(\cdot, t_n)\|_\infty = \sup_x |e(x, t_n)| \leq k n k C(\Delta t, u_0^{(4)}, \alpha) \leq T C(\Delta t, u_0^{(4)}, \alpha) \leq C(\Delta t, u_0^{(4)}, \alpha, T) \Delta t^2$$

L'erreur commise en chaque point de la grille est d'ordre k et le schéma est convergent.

EXEMPLES DES SCHÉMAS POUR L'ÉQUATION DU TRANSPORT :

1) Schéma décentré à gauche (à voir 1a)

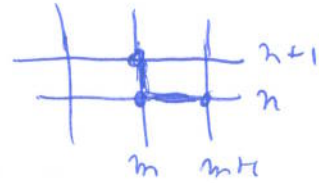
$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \alpha \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} = 0$$



• Schéma décentré à droite (à l'120)

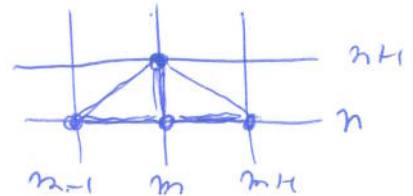
3.9

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} = 0$$



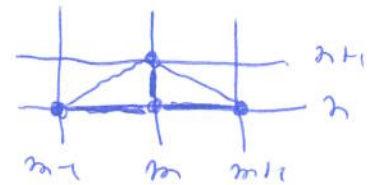
• Schéma centré (à l'120)

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} = 0$$



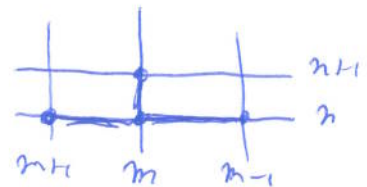
• Schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{U_m^{n+1} - \frac{U_{m+1}^n + U_{m-1}^n}{2}}{k} + a \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} = 0$$



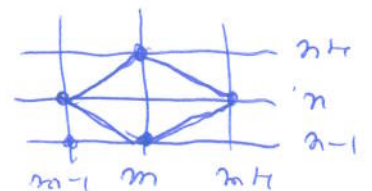
• Schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 k}{2} \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} = 0$$



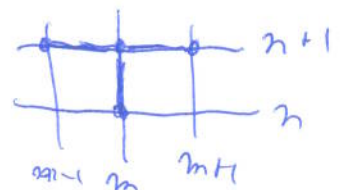
• Schéma route-mouton (à l'120)

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + a \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} = 0$$



• Schéma implicite centré

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0$$



Exemples consistence et précision

3.10

1) schéma explicite décentré à gauche pour

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; u \text{ régulière}$$

$$u_{m \pm 1}^n = u(x_m \pm h, t_n) = u_m^n \pm h u_x(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_m, t_n) + O(h^3)$$

$$u_m^{n+1} = u(x_m, t_n + \tau) = u_m^n + \tau u_t(x_m, t_n) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x_m, t_n) + O(\tau^3)$$

$$L_{\tau, h} u(x_m, t_n) = u_t(x_m, t_n) + a u_x(x_m, t_n) + \frac{1}{2} (\tau u_{tt}(x_m, t_n) - a^2 h^2 u_{xx}(x_m, t_n)) + O(\tau^2 + h^2)$$

$$L_{\tau, h} u(x, t) - Lu(x, t) = \frac{1}{2} (\tau u_{tt}(x, t) - a^2 h^2 u_{xx}(x, t)) + O(\tau^2 + h^2)$$

2) Lax-Wendroff

Ce schéma est basé sur l'utilisation du développement de Taylor. Une solution régulière de l'edo, on a:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3)$$

Or $u_t = -a u_x$ et $u_{tt} = -a u_{xt} = a^2 u_{xx}$, d'où

$$u_m^{n+1} = u_m^n - a \tau \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2 \tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^3)$$

En utilisant une discrétisation spatiale centrée pour approximer u_x et u_{xx} on obtient:

$$U_m^{n+1} = U_m^n - a \tau \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + \frac{a^2 \tau^2}{2} \frac{U_{m+2}^n - 2U_m^n + U_{m-2}^n}{h^2}$$

Ce schéma est consistant et d'ordre 2 en espace et temps (pour $h = \frac{\tau}{2}$ fixé).

En fait:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} = u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau^2)$$

$$\frac{c}{2h} (u_{m+1}^n - u_m^n) = \frac{c}{2h} \left(h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} - u_m^n + h u_x - \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) \right) =$$

$$= \frac{c}{h} u_x + \frac{c h^2}{6} u_{xxx} + O(h^3)$$

$$\frac{c^2 \tau}{2h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) = \frac{c^2 \tau}{2h^2} \left(h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{12} u_{xxxx} - h u_x + h^2 u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{12} u_{xxxx} + O(h^5) \right) =$$

$$= \frac{c^2 \tau}{2h^2} \left(h^2 u_{xx} + \frac{h^4}{6} u_{xxxx} + O(h^5) \right) = \frac{c^2 \tau}{2} u_{xx} + \frac{c^2 \tau h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^3)$$

$$L_{h,\tau} u - Lu = \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau^2) + \frac{c h^2}{6} u_{xxx} + O(h^3) - \frac{c^2 \tau}{2} u_{xx} - \frac{c^2 \tau h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^3) =$$

$$= O(\tau^2) + \frac{c h^2}{6} u_{xxx} - \frac{c^2 \tau h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^3), \text{ si } \tau = \frac{h}{h} \text{ fixe} \Rightarrow$$

$$L_{h,\tau} u - Lu = \frac{c h^2}{6} u_{xxx} - \frac{c^2 \tau h^3}{12} u_{xxxx} + O(h^3)$$

3) Lax-Friedrichs

$$\frac{u_m^{n+1} - 1/2(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + c \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

Pour u régulière on a que

$$L_{h,\tau} u - Lu = \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + O(\tau^2 + h^4/\tau) + \frac{c h^2}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

on voit

$$\frac{u_m^{n+1} - 1/2(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} = \frac{u_m^n + \tau u_{tt} + \tau^2/2 u_{ttt} + O(\tau^3) - 1/2(2u_m^n + 2h^2 u_{xx} + O(h^4))}{\tau} =$$

$$= u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau^2) - \frac{h^2}{\tau} u_{xx} + O(h^4/\tau)$$

$$c \frac{(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2h} = \frac{c}{2h} \left(2h u_x + \frac{2h^3}{6} u_{xxx} + O(h^5) \right) = c u_x + \frac{c h^2}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

Donc le schéma est consistant si $h^2/\tau \rightarrow 0$ pour $h, \tau \rightarrow 0$.

Si $\tau = h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$ fixe, on a un schéma consistant d'ordre 1.

Définition 3.6

Soit $\|\cdot\|_h$ une norme sur l'espace des suites indexées sur \mathbb{Z} .

Un schéma numérique au DF est dit stable par cette norme si :

$\forall T > 0 \exists k_T > 0$ telle que $\forall (h, t) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|v_j^t\|_h \leq k_T \|v_j^0\|_h$$

Remarque

On autorise une certaine croissance au cours du temps de la norme continue associée à cette norme discrète pour la solution du problème initial. Cette croissance est toutefois "maîtrisée" car indépendante de h et t .

Définition 3.7 Si dans la définition (3.6) on peut prendre $k_T = 1$, on dit que le schéma est strictement stable.

Stabilité L^2

Question : Comment voit $\|u^n\|_{2,h}$ lorsque n varie.

Idee : on utilise la transformée de Fourier, ce qui rend cette analyse plus aisée grâce à les trois propriétés suivantes :

i) Etape de reconstruction d'une fonction constante par morceaux on peut réécrire le schéma sur les fonctions.

Pour tout n , on construit à partir de $(v_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ une fonction u^n définie sur \mathbb{R} et constante par morceaux :

$$\forall x \in [j_h, (j+1)h[\quad u^n(x) := v_j^n$$

Alors on remarque que :

$$a) \|u^n\|_2 = \|v^n\|_{2,h}$$

$$b) \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}] \quad u^n(x) = v_j^n \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{Z} \quad u^n(x+\alpha h) = v_{j+\alpha}^n$$

$$ii) \text{ Formule de Parseval} \quad \|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$$

iii) La transformée de Fourier d'une translation est simple

Si on note T_h la translation de h : $(T_h u)(x) = u(x+h)$

$$\text{Alors } \widehat{T_h u} = e^{i\eta h} \hat{u} \quad ; \quad \hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x) dx \quad ; \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Analyse de stabilité par le x^eme décentré à gauche

Commençons par un exemple :

$$\text{Étape 1: } \frac{v_j^{2k} - v_j^n}{k} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} = 0$$

après reconstruction on a $\forall \theta \in \mathbb{Z}, \forall x \in [x_\theta, x_{\theta+1}]$

$$\frac{u^n(x) - u^n(x)}{k} + a \frac{u^n(x) - u^n(x-h)}{h} = 0$$

qui est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$.

Étape 2 : On applique la transformée de Fourier

$$\frac{\hat{u}^{2k} - \hat{u}^n}{k} + a \frac{\hat{u}^n - e^{-i\eta h} \hat{u}^n}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}^{2k} = \left[1 - \frac{a\eta h}{k} (1 - e^{-i\eta h}) \right] \hat{u}^n$$

Pour $\eta h = 0$ on a

$$\hat{u}^{n+1} = \left[1 - \frac{a\tau}{h} (1 - e^{-i\alpha}) \right] \hat{u}^n = g(\theta, h, \tau) \hat{u}^n$$

$g(\theta, h, \tau)$ = facteur d'amplification

Exercice 3: Analyse du facteur d'amplification

On est en présence d'une suite géométrique:

$$\hat{u}^n = (g(\theta, h, \tau))^n \hat{u}^0$$

et

$$\|v_j^n\|_{2,h} = \|u^n\|_2 = \|\hat{u}^n\|_2 = \|(g(\theta, h, \tau))^n \hat{u}^0\|_2$$

Calculons le module de g : $\lambda = \frac{a\tau}{h}$

$$|g(\theta, h, \tau)|^2 = |1 - \lambda(1 - e^{-i\alpha})|^2 = 1 - 2\lambda(1 - h)(1 - \cos\theta)$$

cas favorable $0 < \lambda \leq 1$ alors $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |g(\theta, h, \tau)|^2 \leq 1$

$$\text{donc } \|g(\theta, h, \tau)^n \hat{u}^0\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 = \|v_j^0\|_{2,h}$$

$$\Rightarrow \|v_j^n\|_{2,h} \leq \|v_j^0\|_{2,h}$$

le schéma est strictement stable si $0 < \lambda \leq 1$.

On parle de stabilité conditionnelle. La contrainte fixe donc les pas τ et h de tendre vers 0. Ils tendent vers 0 selon un rapport précis.

Théorème 4 (Von Neumann)

Soit un schéma aux différences linéaires à un pas qui s'écrit après transformation de Fourier

$$\hat{u}^{n+1} = g(\xi, h, \tau, h) \hat{u}^n$$

où la fonction $g(\omega, \tau, h)$ s'appelle facteur d'amplification. 3.15

Alors le schéma est stable en zéro L^2 si et seulement si il existe une constante K , indépendante de τ et h et des constantes τ_0, h_0 telles que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \tau \in]0, \tau_0], \forall h \in]0, h_0] \\ |g(\omega, h, \tau)| \leq 1 + K\tau$$

On autorise $|g|$ à être supérieur à 1, mais seulement de $K\tau$.

Cas particulier du troisième

Si $|g(\omega, h, \tau)|$ ne dépend pas explicitement de τ et h dans la condition NS devient :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad |g(\omega, h, \tau)| \leq 1$$

Application : Avec le troisième et son cas particulier on peut faire aussi de la stabilité conditionnelle !

Dans l'exemple précédent :

$$|g(\omega, h, \tau)|^2 = 1 - 2\tau(1-\tau)(1 - \cos \omega h)$$

Lorsque ω est fixé, ce qui signifie $\frac{\omega \tau}{h}$ fixé, on est dans

le cas particulier du troisième.

Peu importe de mener une discussion sur h

$$a) 0 \leq \tau \leq 1 \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad |g(\omega, h, \tau)| \leq 1$$

donc le schéma est stable en zéro L^2 dans cette condition

$$b) \tau > 1 \Rightarrow -2\tau(1-\tau) > 0 \text{ donc } \exists \omega \in \mathbb{R} : |g(\omega, h, \tau)| > 1$$

le schéma est instable dans ce cas.

On conclut : le schéma est stable sous la condition $h\tau \leq 1$.

Exemple 2 : Schéma centre-

3.16

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

Après l'étape de reconstruction, on remplace dans le schéma

$$u_{j\pm 1}^{n+1/2} \text{ par } u^{n+1/2}(\lambda \pm a h)$$

puis on applique la transformée de Fourier :

$$u_{j\pm 1}^{n+1/2} \rightarrow e^{i\theta} u^{n+1/2}, \text{ où } \theta = \xi h$$

donc on veut écrire :

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{k} + a \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2h} \hat{u}^n = 0$$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - i k \sin \theta) \hat{u}^n$$

$$g(\theta, a, k) = 1 - i k \sin \theta \text{ avec } k = \frac{a k}{h}$$

$$|g(\theta, a, k)|^2 = 1 + k^2 \sin^2 \theta$$

Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, il existe des valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $|g| > 1$
donc le cas particulier du théorème implique que le schéma est
toujours instable. On dira que le schéma explicite centre est
inconditionnellement instable.

Exemple 3 : schéma implicite centre-

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{k} + a \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2h} \hat{u}^{n+1} = 0$$

$$|g(\theta, a, k)|^2 = \frac{1}{1 + k^2 \sin^2 \theta} \leq 1 \quad \forall \theta$$

Le schéma est inconditionnellement stable

Exemple 4: Schéma de centre à droite

3.17

$$a > 0$$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{h} + a \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = 0$$

$$u^{n+1} = [1 - \lambda(e^{i\theta} - 1)] u^n = (1 + \lambda - \lambda \cos \theta) u^n$$

$$|g| = (1 + \lambda)^2 - 2\lambda(1 + \lambda)\cos \theta = 1 + \lambda(1 - \cos \theta)$$

Schéma inconditionnellement instable.

Bilan: étude de stabilité L^2 par l'équation de von Neumann.

- Recherche le facteur d'amplification, norme son module.
- si possible, l'exprimer uniquement à l'aide de θ et $\lambda = \frac{a h \tau}{h}$

Dans ce cas on explique le cas particulier du théorème 4:

3 cas:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $|g(\theta, \lambda, \tau)| \leq 1$

le schéma est inconditionnellement stable

ii) pour $0 < \lambda < \lambda_0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $|g(\theta, \lambda, \tau)| \leq 1$ et

pour $\lambda > \lambda_0$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$: $|g(\theta, \lambda, \tau)| > 1 \Rightarrow$

le schéma est stable sur la condition $\lambda < \lambda_0$

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$: $|g(\theta, \lambda, \tau)| > 1 \Rightarrow$

le schéma est inconditionnellement instable.

- Enfin on se place dans le cadre du théorème 4 lui-même.

Critère de Courant-Friedrichs-Lewy

3.18

Il s'agit d'une condition nécessaire de stabilité appelée condition CFL, qui s'énonce : "Le domaine de dépendance numérique doit contenir le domaine de dépendance continue".

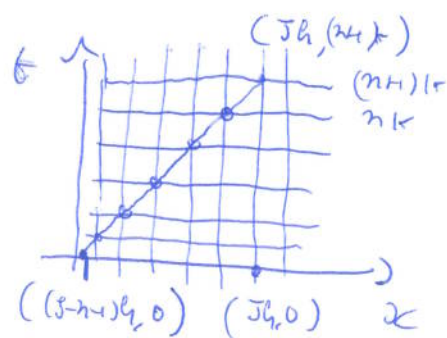
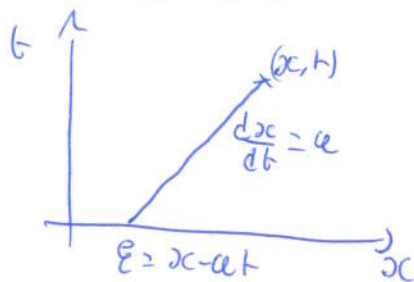
Exemple : Soit
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = u_0(x-at)$$

On considère le schéma décentré à gauche :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$\Rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{a\tau}{h}$$

$$\Rightarrow u_j^{n+1} = (1-\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n$$



Le domaine continu de $(x,t) = \{x-at\}$

Le domaine de dépendance numérique du point $(Jh, (n+1)\tau)$ est égal à l'intervalle $[(j-1)h, Jh]$

$$\text{Pour } (x,t) = (Jh, (n+1)\tau), \text{ on a : } \xi = x-at = Jh - a(n+1)\tau = [j - \lambda(n+1)]h$$

$$\Rightarrow \{ [j - \lambda(n+1)]h \} = \text{domaine continu}$$

Pour le critère CFL le domaine continu \subset le domaine numérique

$$\xi \in [(j-1)h, Jh] = \text{domaine numérique}$$

$$\Rightarrow (j-1)h \leq [j - \lambda(n+1)]h \leq Jh \Leftrightarrow$$

$$-(n+1) \leq -\lambda(n+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \lambda \geq 0$$

SYSTÈMES HYPERBOLIQUES LINÉAIRES

3.19

On considère le système hyperbolique en dimension 1 :

$$(1) \begin{cases} u_t + Au_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u(x, t) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur à m composantes et A est une matrice carrée donnée de dimension m sur \mathbb{R} .

On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A réelles et P la matrice de passage.

On pose $\tilde{u}(x, t) = P^{-1}u(x, t)$, donc $\tilde{u}(x, t)$ satisfait :

$$(2) \begin{cases} \tilde{u}_t + \Lambda \tilde{u}_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = P^{-1}u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Pour résoudre numériquement le système (1) on peut utiliser la même décomposition. On pose $\tilde{v}_j^n = P^{-1}v_j^n$ et on utilise par exemple un schéma décentré à gauche pour le système (2) :

$$\tilde{v}_j^{n+1} = \tilde{v}_j^n + \frac{\lambda_j \tau}{h} (\tilde{v}_{j-1}^n - \tilde{v}_j^n)$$

Alors la p -équation scalaire est stable si et seulement si

$$0 \leq \frac{\lambda_j \tau}{h} \leq 1$$

Donc en particulier si les valeurs propres sont toutes positives. Si la condition de stabilité est satisfaite pour $p=1, 2, \dots, m$ alors \tilde{v}_j^n converge vers $\tilde{u}(x, t)$ et donc $v_j^n = P \tilde{v}_j^n$ converge vers $u(x, t) = P \tilde{u}(x, t)$.

Les méthodes décentrées peuvent être utilisées seulement 3.20
si toutes les valeurs propres ont le même signe.

Dans la pratique, ce n'est pas le cas, par exemple pour
le système d'Euler de la dynamique de gaz ~~identique~~
linéarisé les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = v, \lambda_2 = v + c, \lambda_3 = v - c$$

avec v vitesse moyenne et c la vitesse du son. Donc ils ont
le même signe seulement si $|v| > c$. Dans ce cas l'écoulement
est dit supersonique. Si $|v| < c$ alors l'écoulement est dit
subsonique et tous les schémas décentrés deviennent instable.

L'application correcte des méthodes décentrés dans ce cas
devient :

$$\lambda_p^+ = \max(\lambda_p, 0) \quad \Lambda^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_m^+)$$
$$\lambda_p^- = \min(\lambda_p, 0) \quad \Lambda^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-)$$

avec $\Lambda^+ + \Lambda^- = \Lambda$ et

$$\tilde{U}_j^{n+1} = \tilde{U}_j^n - \frac{\Delta x}{\Delta t} \Lambda^+ (\tilde{U}_j^n - \tilde{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta x}{\Delta t} \Lambda^- (\tilde{U}_{j-1}^n - \tilde{U}_j^n)$$

et finalement

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta x}{\Delta t} A^+ (U_j^n - U_{j+1}^n) - \frac{\Delta x}{\Delta t} A^- (U_{j-1}^n - U_j^n)$$

avec $A^+ = P \Lambda^+ P^{-1}$, $A^- = P \Lambda^- P^{-1}$ et $A^+ + A^- = A$.