Correction TD2 de Probabilités

4 Décembre 2015

Correction 1. Soient $1 \leq p \leq q$. Posons $k = \frac{q}{p}$ et $l = \frac{p}{q-p}$. On a que $k \geq 1$ et $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^p$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$, avec les exposants k et l, on obtient

$$\mathbb{E}\,|X|^p = \int |x|^p d\mu(x) \leq \left(\int |x|^q d\mu(x)\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int 1^l d\mu(x)\right)^{\frac{q-p}{p}}.$$

Or μ est une mesure de probabilité, donc

$$\mathbb{E}\,|X|^p \leq \left(\int |x|^q d\mu(x)\right)^{\frac{p}{q}} = (\mathbb{E}|X|^q)^{p/q}.$$

Si $\mathbb{E}|X|^q = +\infty$, alors l'inégalité demandée est claire. Sinon, d'après l'inégalité ci-dessus on a que $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$. En passant à la racine $p^{\text{ième}}$, on en conclut que

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}.$$

Correction 2. 1. On a

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\mathbb{P}\left(X > t\right) dt = \int f'(t)\mathbb{1}_{t>0}\left(\int \mathbb{1}_{x>t} d\mu(x)\right) dt.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonnelli, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(t) \int \mathbb{1}_{x>t} d\mu(x) dt &= \int \left(\int \mathbb{1}_{t>0}\mathbb{1}_{x>t} f'(t) dt\right) d\mu(x) \\ &= \int \left(\int_0^x f'(t) dt\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

Comme f est de classe C^1, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(t) \int \mathbb{1}_{x>t} d\mu(x) dt &= \int \left[f(t)\right]_0^x d\mu(x), \\ &= \int f(x) d\mu(x),\end{aligned}$$

car $f(0) = 0$. Par le théorème de transfert, on conclut

$$\mathbb{E}f(X) = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathbb{P}\left(X > t\right) dt.$$

2. En appliquant la question à la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^p$, on obtient

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^{+\infty} p t^{p-1}\mathbb{P}\left(X > t\right) dt.$$

3. D'après la question 2.

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X > t\right) dt.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonnelli, ou par théorème de convergence monotone, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X > t\right) dt = \sum_{n\geq 1} \int_{n-1}^{n} \mathbb{P}\left(X > t\right) dt.$$

Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{n\geq 1} \int_{n-1}^{n} \mathbb{P}\left(X > n-1\right) dt \\ &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(X > n-1\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(X \geq n\right).\end{aligned}$$

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p > 0$. On a, d'après la question 3.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(X \geq n\right) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq n} (1-p)^{k-1} p \\ &= \sum_{n\geq 1} p \frac{(1-p)^{n-1}}{p}. \\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Correction 3. 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Binomiale de paramètres (n, p). Soit $s > 0$. On a

$$\begin{aligned}G_X(s) = \mathbb{E}s^X &= \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(ps + (1-p)\right)^n.\end{aligned}$$

On a

$$\mathbb{E}X = G_X'(1) = np.$$

$$\mathbb{E}X(X-1) = G_X''(1) = n(n-1)p^2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).\end{aligned}$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$. Soit $s > 0$. On a,

$$G_X(s) = \sum_{n\geq 1} s^n (1-p)^{n-1} p = ps \sum_{n\geq 0} \left(s(1-p)\right)^n.$$

G_X est une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{1-p}$. Pour tout $0 < s < \frac{1}{1-p}$,

$$G_X(s) = \frac{ps}{1 - s(1-p)}.$$

Comme G_X est de rayon de convergence $\frac{1}{1-p} > 1$, on sait par théorème de dérivation termes à termes des séries entières, que

$$G'_X(1) = \sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}X,$$

$$G''_X(1) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}X(X-1).$$

Or pour tout $0 < s < \frac{1}{1-p}$,

$$G'_X(s) = \frac{p}{(1 - s(1-p))^2},$$

$$G''_X(s) = \frac{2(1-p)p}{(1 - s(1-p))^3}.$$

D'où,

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On a pour tout $s > 0$,

$$G_X(s) = \sum_{n \geq 0} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{(s-1)\lambda}.$$

G_X est une série entière de rayon de convergence infini. On a donc,

$$G'_X(1) = \mathbb{E}X, \; G''_X(1) = \mathbb{E}X(X-1).$$

Or pour tout $s > 0$,

$$G'_X(s) = \lambda e^{(s-1)\lambda}.$$
$$G''_X(s) = \lambda^2 e^{(s-1)\lambda}.$$

D'où,

$$\mathbb{E}X = \lambda,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Correction 4. 1. On a

$$(0,+\infty) = \cup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n},+\infty\right),$$

et $(\left[\frac{1}{n},\infty\right))_{n\geq 1}$ est une famille croissante d'ensembles. Donc

$$\mathbb{P}\left(X>0\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{n}\right).$$

Or par hypothèse, $\mathbb{P}(X>0)>0$. Donc il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{P}\left(X\geq\frac{1}{n_0}\right)>0.$$

2. On a pour tout $n\geq 1$ et tout $s\geq 0$, $F((n+1)s) = F(ns)+F(s)$. Par ailleurs, $F(0) = F(2.0) = 2F(0)$. Donc $F(0)=0$. Par récurrence on montre que pour tout $n\geq 1$, $F(ns) = nF(s)$. Comme $F(0)=0$, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F(ns)=nF(s)$.
3. Soit maintenant $s>0$. Il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $s<\frac{p}{n}$. D'après 2.

$$\mathbb{P}\left(X>p\frac{1}{n}\right) = \left(\mathbb{P}\left(X>\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

On en déduit que,

$$\mathbb{P}\left(X>\frac{p}{n}\right)>0.$$

Or

$$\mathbb{P}\left(X>s\right)\geq\mathbb{P}\left(X>\frac{p}{n}\right)>0.$$

4. (a). Soient $p,q\in\mathbb{N}$, avec $q\neq 0$. En utilisant la question 2., on a

$$F(p) = F\left(q\frac{p}{q}\right) = qF\left(\frac{p}{q}\right).$$

Par ailleurs, en utilisant encore une fois le résultat précédent, $F(p)=pF(1)$. D'où,

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}F(1).$$

(b). Comme F est croissante, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point. En effet, on montre, en revenant à la définition de l'infimum et le supremum d'un ensemble que pour tout $s>0$,

$$\lim_{\substack{t\to s\\ t<s}}F(t) = \sup_{t<s}F(t),$$

$$\lim_{\substack{t\to s\\ t>s}}F(t) = \inf_{t>s}F(t),$$

De plus,

$$\lim_{\substack{t\to s\\ t<s}}F(t)\leq F(s)\leq\lim_{\substack{t\to s\\ t>s}}F(t). \tag{1}$$

Soit $s > 0$. Or $\mathbb{Q}^+$ est dense dans $\mathbb{R}^+$. Donc il existe deux suites, $(t_n)_n$ et $(q_n)_n$, de rationnels positifs, tels que $t_n < s < q_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, et tels que

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s, \; q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s.$$

Comme F admet des limites à droite et à gauche en s et comme on a l'encadrement (1), on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) \leq F(s) \leq \lim_{m\to+\infty} F(q_m).$$

Or d'après la question (c). pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F(t_n) = t_n F(1), \; F(q_n) = q_n F(1).$$

D'où

$$sF(1) \leq F(s) \leq sF(1).$$

On conclut que $F(s) = sF(1)$.

3. Comme $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, on peut poser, $F(t) = \log \mathbb{P}(X > t)$. Par hypothèse, on a pour tout $t, s \geq 0$,

$$F(t+s) = F(t) + F(s).$$

Donc d'après la question 2), $\forall t \geq 0, F(t) = tF(1)$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t},$$

avec $\lambda = -\log \mathbb{P}(X > 1) > 0$ car $\mathbb{P}(X > 1) < 1$ ($\mathbb{P}(X > s) > 0$ pour tout $s > 0$ d'après 1.).

Par ailleurs, on a $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X > 0)^2$. Comme $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. D'où,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \mathbb{P}(X \leq t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

Donc la loi de X a la même fonction de répartition qu'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on conclut que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Correction 5. 1. On montre par récurrence sur k, que si $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$ alors φ est k-fois dérivable en 0.
Initialisation : $k = 1$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(|E^{itX}|\right) = 1 < +\infty$.
• Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto e^{itX(\omega)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, \; \left|iX(\omega)e^{itX}\right| \leq |X(\omega)|,$$

et $X \in L^1$.
On en déduit, par théorème de dérivation sous le signe intégral, que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \varphi'(t) = i\mathbb{E}\left(Xe^{itX}\right).$$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie au rang k. Supposons que $\mathbb{E}|X|^{k+1} < +\infty$. Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}|X|^k \leq \left(\mathbb{E}|X|^{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}}.$$

Donc $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a que φ est k-fois dérivable et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left((iX)^k e^{itX}\right).$$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(|(iX)^k e^{itX}|\right) = \mathbb{E}|x|^k < +\infty$.
• Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R} \mapsto (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,\ \left|(iX(\omega))^{k+1} e^{itX}\right| = |X(\omega)|^{k+1},$$

et $|X|^{k+1} \in L^1$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on obtient que $\varphi^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k+1)}(t) = \mathbb{E}\left((it)^{k+1} e^{itX}\right).$$

2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{itX} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} X^k.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k = \frac{(it)^k}{k!} X^k.$$

En utilisant que $\mathbb{E}|X|^k \leq k! C^k$, on obtient

$$\mathbb{E}|f_k| \leq \frac{(|t|C)^k}{k!}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k \leq n} f_k\right| \leq \sum_{k \leq n} |f_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(|t|C)^k}{k!} = e^{|t|C} < +\infty.$$

On a donc :
• Pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{n \to +\infty} f_k(\omega) = e^{itX(\omega)}$.
• Pour tout ω,

$$\left|\sum_{k \leq n} f_k(\omega)\right| \leq e^{|t|C} < +\infty.$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(f_k) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k \leq n} f_k\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right).$$

D'où,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right).$$

4. Supposons que ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int x^k d\mu = \int x^k d\nu.$$

On a alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int x^{2k} d\nu(x) = \int x^{2k} d\mu(x) \leq C^{2k}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int |x|^{2k-1} d\nu(x) \leq \left(\int x^{2k} d\nu(x)\right)^{\frac{2k-1}{2k}} = \left(\int x^{2k} d\mu(x)\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \leq \left(C^{2k}\right)^{\frac{2k-1}{2k}} = C^{2k-1}.$$

On en déduit, en appliquant le résultat de la question 3. à la mesure ν, que la fonction caractéristique ψ de ν est telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int x^k d\nu(x).$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int x^k d\nu(x) = \int x^k d\mu(x),$$

on a que $\varphi = \psi$. Or la fonction caractéristique caractérise la loi, donc on en déduit que $\mu = \nu$.

Correction 6. 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $e^{\lambda X}$ est une fonction mesurable positive, son espérance est bien définie. On a par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\lambda X} &= \int e^{\lambda x} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int e^{-(x-\lambda)^2/2} e^{\lambda^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable linéaire $y = x - \lambda$, on obtient

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda^2/2} \int e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2},$$

Car la loi normale est une mesure de probabilité.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\left|e^{zX}\right| = e^{\Re(z)X} \left|e^{i\Im(z)X}\right| = e^{\Re(z)X}$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}e^{\Re(z)X} < +\infty,$$

donc e^{zX} est intégrable. La transformée de Laplace complexe est bien définie sur $\mathbb{C}$.

Notons pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \mathbb{E}\left(Xe^{zX}\right).$$

Cette espérance est bien définie car pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|Xe^{zX}| = |X|e^{\Re(z)X}.$$

On a l'inégalité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq e^x + e^{-x}.$$

D'où,

$$|X|e^{\Re(z)X} \leq e^{(\Re(z)+1)X} + e^{(\Re(z)-1)X}.$$

Grâce à la question précédente, on obtient que Xe^{zX} est intégrable.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant dans $\mathbb{C}$ vers 0. On a que

$$\left|\frac{\Lambda(z+h_n)-\Lambda(z)}{h_n} - f(z)\right| \leq \mathbb{E}\left|\frac{e^{(z+h_n)X}-e^{zX}}{h_n} - Xe^{zX}\right|.$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\omega \in \Omega$,

$$f_n(\omega) = \frac{e^{(z+h_n)X}-e^{zX}}{h_n} - Xe^{zX}.$$

• Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(\omega)| = 0,$$

car $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{zX(\omega)}$ est holomorphe pour tout $\omega \in \Omega$, de dérivée $z \in \mathbb{C} \mapsto Xe^{zX(\omega)}$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$|f_n(\omega)| \leq \left|e^{zX(\omega)}\right| \left|e^{h_nX} - 1\right| + \left|X(\omega)e^{zX(\omega)}\right|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\left|e^{h_nX(\omega)} - 1\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|X(\omega)e^{th_nX(\omega)}\right| |h_n|.$$

Or $\left|e^{th_nX(\omega)}\right| = e^{t\Re(h_n)X(\omega)} \leq e^{tCX(\omega)} + e^{-tCX(\omega)}$, pour une certaine constante $C > 0$ majorant la suite $(|\Re(h_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$. En notant $R = \sup |h_n| : n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(\omega)| \leq R\left|X(\omega)\left(e^{CX(\omega)} + e^{-CX(\omega)}\right)e^{zX(\omega)}\right| + \left|X(\omega)e^{zX(\omega)}\right| \in L^1,$$

car on a montré précédemment que Xe^{zX} est intégrable pour tout $z \in \mathbb{C}$. On conclut par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\frac{\Lambda(z+h_n)-\Lambda(z)}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z),$$

et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$ et toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0. Donc Λ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Lambda'(z) = \mathbb{E}\left(Xe^{zX}\right).$$

3. Λ coïncide avec la fonction $z \mapsto e^{z^2/2}$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit par le théorème d'unicité du prolongement analytique que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \Lambda(z) = e^{z^2/2}.$$

Correction 7. 1. Notons pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\omega \in \Omega$,

$$f(t,\omega) = e^{itX(\omega)}.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}|f(t,\omega)| = 1 < +\infty$.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto e^{itX(\omega)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,\omega)\right| = \left|(iX(\omega))e^{itX(\omega)}\right| = |X(\omega)|,$$

et $X \in L^1$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \mathbb{E}\left(iXe^{itX}\right).$$

Soient $M > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{-M}^{M} xe^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}dx = \left[-\sigma^2 e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}\right]_{-M}^{M} + \sigma^2\int_{-M}^{M}(it)e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}dx.$$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient,

$$\int xe^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}dx = \sigma^2\int (it)e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}dx.$$

Or par le théorème de transfert,

$$\varphi'(t) = \int ixe^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = -\sigma^2 t^2\int e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

En utilisant de nouveau le théorème de transfert, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = -\sigma^2 t\varphi(t).$$

2. L'équation différentielle satisfaite par φ étant une équation différentielle linéaire du premier ordre. De plus, une primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto -\sigma^2 t$ est $t \in \mathbb{R} \mapsto -\sigma^2t^2/2$. Donc l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{E} = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma e^{-\sigma^2t^2/2}, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Donc il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \gamma e^{-\sigma^2t^2/2}.$$

Or $\varphi(0) = 1$. Donc $\gamma = 1$. On conclut que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = e^{-\sigma^2t^2/2}.$$