Correction Feuille 2 :

19 Janvier 2016

Correction 1. 1. (a). u est un vecteur non nul, c'est donc un système libre de $\mathbb{R}^2$. La dimension de $\mathrm{Vect}(u)$ est 1.
(b). On a $v = 3u$, donc (u, v) est un système lié. Donc

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u).$$

On en déduit que la dimension du sous-espace engendré par (u, v) est 1. Comme (u, v) est lié, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
(c). Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} -\lambda & +3\mu & = 0 \\ \lambda & -2\mu & = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu) \in \mathcal{E} &\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda & +3\mu & = 0 \\ \lambda & -2\mu & = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda & +3\mu & = 0 \\ \mu & = & 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda.u + \mu.v = \vec{0} \Longrightarrow \lambda = \mu = \vec{0}.$$

Donc (u, v) est un système libre de vecteurs. La dimension de l'espace qu'ils engendrent est 2. On a $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim \mathrm{Vect}(u, v) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, donc

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u, v).$$

Donc (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(d). La dimension de $\mathbb{R}^2$ est 2. Donc (u, v, w) est un système lié. On remarque que

$$(0, 6) = u + v, \ (2, 0) = u - v.$$

Donc $e_1, e_2 \in \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Donc $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Or $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$. On en déduit

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathbb{R}^2.$$

La dimension du sous-espace que (u, v, w) engendre est 2.

2. (a). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda.v + \mu.w = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcrcl} \lambda & & & = & 0 \\ \lambda & +2\mu & & = & 0 \\ \lambda & -3\mu & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que (v, w) est libre. Donc la dimension de l'espace qu'ils engendrent est 2.

(b). Comme le système contient le vecteur nul, il est nécessairement lié. On a

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, w).$$

Or pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda.u + \mu.w = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lccl} \lambda & -2\mu & = & 0 \\ & 4\mu & = & 0 \\ \lambda & +3\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc le système (u, w) est libre. On en déduit que la dimension de $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, w)$ est 2.

(c). Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda.u + \mu.v + \nu.w = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllcl} \lambda & -2\mu & -4\nu & = & 0 \\ 2\lambda & +3\mu & +13\nu & = & 0 \\ -\lambda & -\mu & -5\nu & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllcll} \lambda & -2\mu & -4\nu & = & 0 & \\ & 7\mu & +21\nu & = & 0 & (L2) \longleftarrow (L2) - 2(L1) \\ & -3\mu & -9\nu & = & 0 & (L3) \longleftarrow (L3) + (L1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllcll} \lambda & -2\mu & -4\nu & = & 0 & \\ & \mu & +3\nu & = & 0 & (L2) \longleftarrow \frac{1}{7}(L2) - 2(L1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -2\nu \\ \mu & = & -3\nu \end{array}\right.$$

On en déduit que (u, v, w) est liée. De plus, on a (en prenant $\nu = 1$ dans les équivalences précédentes)

$$w = 2u + 3v.$$

Donc

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v).$$

D'après les équivalences précédentes,

$$\lambda.u + \mu.v = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que (u, v) est libre.

Correction 2. (a). Notons F_1 l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x', y') \in F_1$. On a, puisque $(x, y), (x', y') \in F$,

$$\lambda.(x, y) + \mu.(x', y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (2(\lambda y \mu y'), \lambda y + \mu y').$$

Donc $\lambda.(x, y) + \mu.(x', y') \in F_1$. On en déduit que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On aurai aussi pu dire

$$F_1 = \{t.(2, 1) : t \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire que F_1 est la droite engendrée par $(2, 1)$: $(2, 1)$ est une base de F_1.
(b). On a,

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}.$$

Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$. On a que $u, v \in F_2$. Mais

$$u + v = (2, 0) \notin F_2.$$

F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
(c). Soit

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}.$$

Soit $(x, y, z) \in F_3$. .Comme $y = -z$, on peut écrire

$$(x, y, z) = x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, -1).$$

Donc $(x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$. Réciproquement, si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit

$$v = \lambda.(1, 0, 0) + \mu.(0, 1, -1),$$

alors $y = \mu = -z$. Donc

$$F_3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1)).$$

On en déduit que F_3 est un espace vectoriel. On vérifie facilement que $((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ est un système libre. On en déduit que c'est une base de F_3.
(d). Soit

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin(x) = z + y\}.$$

Soit $u = (\frac{\pi}{2}, 0, 1)$. On a $u \in F_4$. Mais

$$2.u = (\pi, 0, 2) \notin F_3.$$

On en déduit que F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(e). Soit

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0, x + y + 2z = 0\}.$$

On a

$$(x, y, z) \in F_4 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & t \\ z & = & -t \\ x & = & t, t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$F_4 = \{t.(1, 2, -1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Donc F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Une base de F_4 est $(1, 2, -1)$.

Correction 3. (a). Une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u)$ est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}.$$

(b). On remarque que les vecteurs u et v appartiennent à l'ensemble :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + 2z = 0\}.$$

Cet ensemble est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que

$$\mathrm{Vect}(u, v) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + 2z = 0\}.$$

Or les vecteurs (u, v) forment un système libre : si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\lambda.u + \mu.v = \vec{0},$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ 2\mu & = & 0 \\ \lambda - 3\mu & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc la dimension de $\mathrm{Vect}(u, v)$ est 2, et la dimension de

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + 2z = 0\},$$

est 2. Donc

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + 2z = 0\}.$$

(c). Une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u)$, est

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, y = z\}.$$