Correction Feuille 3 : Calcul matriciel, applications linéaires

14 mars 2016

Correction 1. On trouve :

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 4 & 14 \\ -6 & -1 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 24 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Correction 2. 1. Les produits licites sont : BA, BC, CA, AB. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \ BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 11 \\ -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \ AB = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. $BA \in \mathcal{M}_{3,3}$ et $AB \in \mathcal{M}_{2,2}$. Donc $AB \neq BA$.
3. On a d'une part,

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \ (AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1-5 & \end{pmatrix}, \ A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 3. 1. On a :

$$A\frac{1}{2}(A - I_3) = A\frac{1}{2}(A - I_3) - I_3.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

2. Le système (S) se réécrit sous la forme

$$AX = B,$$

avec $X = (x, y, z)$ et $B = (1, 2, 3)$. En multipliant par A^{-1}, le système (S) est équivalent à l'équation

$$X = A^{-1}B.$$

Donc (S) admet une unique solution qui est

$$A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 4. 1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \mu N) &= A\,(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)\,A \\ &= \lambda\,(AM - MA) + \mu\,(AN - NA) \\ &= \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N) \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

2. On a
$$\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même,
$$\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{2,1})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 5. 1. Comme f est une application linéaire,

$$\begin{aligned} f(v) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(e_1 + 2e_3) + y(2e_2 - e_3) + z(3e_1 + e_2 + 2e_3) \\ &= (x + 3z)e_1 + (2y + z)e_2 + (2x - y + 2z)e_3. \end{aligned}$$

2. La matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1) est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_3) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 = 4(e_1 + e_3) + e_3 + (e_2 - e_3), \\ f(e_3) &= 3e_1 + e_2 + 2e_3 = 3(e_1 + e_3) + (e_2 - e_3), \\ f(e_2 - e_3) &= -3e_1 + e_2 - 3e_3 = -3(e_1 + e_3) + e_3 + (e_2 - e_3). \end{aligned}$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction 6. 1. La matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le système se traduit par la donnée de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On effectue l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_2$, pour obtenir

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -t \\ z & = & t, t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{E} = \{(0, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

On en déduit que le noyau de f est

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Une base de ce sous-espace est $(0, -1, 1)$.

3. Le système se traduit par la donnée de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

On effectue l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 - b_2 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 + b_1 \\ b_1 \\ b_3 - b_2 \end{pmatrix}.$$

Si $b_2 \neq b_3$, le système n'admet pas de solution. Supposons $b_2 = b_3$. On obtient le système

$$\begin{cases} -2x &= b_2 + b_1 \\ y - z &= b_1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(-\frac{b_1 + b_2}{2}, b_1 + t, t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On en déduit que l'image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \{(b_1, b_2, b_2) : b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Une base de cet espace est $(1,0,0)$, $(0,1,1)$.

4. L'application f n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{0\}$ et n'est pas surjective car $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$.

Correction 7. 1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 1 \\ 25 & 34 & 2 \\ -14 & -19 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On en déduit que

$$A^3 - 3A^2 - 2A = I_3.$$

En factorisant par A, on obtient

$$A\left(A^2 - 3A - 2I_3\right) = \left(A^2 - 3A - 2I_3\right) = I_3.$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 - 3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le système est équivalent à l'équation

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme A est inversible, on a

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Or

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions du système est

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$