Correction Feuille 4 : Inverse par pivot, rang, système de Cramer

17 mars 2016

Correction 1. (a). Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On dispose la matrice A et la matrice identité de la façon suivante
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On effectue les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \longleftarrow -3L_1$, on obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On applique $L_2 \longleftarrow -L_2$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{5}{4}L_2$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$
On effectue $L_3 \longleftarrow 4L_3$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$
On applique $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$, $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$, on obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_1 \longleftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $L_2 \longleftarrow L_2/4$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(b). Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dispose la matrice B et la matrice identité de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_4 \longleftrightarrow L_3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_4 \longleftarrow L_4 + 3L_3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_4 \longleftarrow L_4/(-14)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

On applique $L_3 \longleftarrow L_3 + 5L_4$, $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{9}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

On applique $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

On applique $L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{11}{42} & \frac{11}{21} \\ -\frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

Enfin, $L_2 \longleftarrow L_2/(-3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{11}{42} & \frac{19}{42} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

L'inverse de B est

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{11}{42} & \frac{19}{42} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

Correction 2. (a). On effectue $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

en développant suivant la première ligne.
(b). En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 2.10^2 & 1 \\ 0 & -3.10^2 & 1 \\ 0 & 6.10^5 & -2.10^3 \end{vmatrix} = 0.$$

(c). Notons A_3 la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$, puis $L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_4$,

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En développement suivant la première ligne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On effectue $L_2 \longleftarrow L_1 + \L_2$,

$$\det(A_3) = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

en développant suivant la première ligne.
(d). Notons A_4 la matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$, $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, et on développe suivant la première colonne,

$$\det(A_4) = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, $L_1 \longleftarrow L_1 + 5L_2$, et on développe suivant la dernière colonne,

$$\det(A_4) = -\begin{vmatrix} 18 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 18.2 + 3.1 = 39.$$

Correction 3. On note A_1,A_2, A_3, A_4 les matrices de l'exercice.

(a). On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On applique $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1$, $L_5 \longleftarrow L_5 - L_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$, $L_5 \longleftarrow L_5 - L_3$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $L_4 \longleftrightarrow L_5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{rang}(A_1) = 4$.

(b). Notons $C_1, ..., C_5$ les colonnes de A_2. On observe que

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4 + C_5.$$

Donc

$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \mathrm{Vect}(C_2, C_3, C_4, C_5).$$

On vérifie aisément que le système (C_2, C_3, C_4, C_5) est un système libre. On en déduit que $\mathrm{rang}(A_2) = 4$.

(c). On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1$, $L_5 \longleftarrow L_5 - L_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_2 \longleftarrow L_4$ et $L_2 \longleftarrow -L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$, $L_5 \longleftarrow L_5 + L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On applique $L_5 \longleftarrow L_5 + 2L_4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on effectue $L_4 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{rang}(A_3) = 5$.

(c). Notons C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de A_3. On remarque que

$$C_5 = C_1 + C_2.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4).$$

Or A_3 est de rang 5. On en déduit donc que $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5')$, où C_5' est la $5^{\text{ième}}$ colonne de A_3 est une base de $\mathbb{R}^5$. Donc le sous-système (C_1, C_2, C_3, C_4) est libre. On conclut $\mathrm{rang}(A_4) = 4$.