TD2 de Probabilités

4 décembre 2015

Exercice 1. ♣ *Montrer que si X est une variable aléatoire de loi μ, alors pour tout $1 \leq p \leq q$,*

$$(\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\,|X|^q)^{1/q}\,.$$

Exercice 2. ♣♣

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$ et $f' \geq 0$. Montrer, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\mathbb{E}f\,(X) = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathbb{P}\,(X > t)\,dt.$$

2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}\,(X > t)\,dt.$$

3. Dans le cas où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que

$$\mathbb{E}X = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\,(X \geq n)\,.$$

4. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$.

Exercice 3. ♣ *Calculer les séries génératrices des lois suivantes, puis en déduire leur espérance et leur variance:*

1. Loi Binomiale de paramètres (n, p) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (0, 1)$.

2. Loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$.

3. Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. ♣♣♣ *Le but de l'exercice est de montrer que la loi exponentielle est l'unique loi satisfaisant la propriété d'absence de mémoire, c'est-à-dire,*

$$\forall t, s \geq 0,\ \mathbb{P}\,(X > t + s) = \mathbb{P}\,(X > t)\,\mathbb{P}\,(X > s)\,.$$

1. Soit X une variable aléatoire satisfaisant la propriété ci-dessus. On suppose que $\mathbb{P}\,(X > 0) > 0$. Montrer qu'il existe $s > 0$, tel que

$$\mathbb{P}\,(X > s_0) > 0.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$,

$$\mathbb{P}\,(X > ns) = (\mathbb{P}\,(X > s))^n\,.$$

3. En déduire que pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{P}(X > s) > 0.$$

4.* *(question facultative) On suppose que $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante vérifiant*

$$\forall t, s \geq 0, \ F(s+t) = F(s) + F(t).$$

(b). En utilisant la question 2. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{Q}^+$, $F(s) = sF(1)$.
(c). En déduire que pour tout $t \geq 0$, $F(t) = tF(1)$.
5. Soit $F(t) = \log \mathbb{P}(X > t)$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, tel que

$$F(t) = \lambda t.$$

6. Conclure.

Exercice 5. ♣♣ *1. Soit X une variable aléatoire réelle. On note φ sa fonction caractéristique. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que si $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$, alors φ est k-fois dérivable sur $\mathbb{R}$, auquel cas*

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left(X^k e^{itX}\right).$$

2. Soit μ une mesure de probabilité. Montrer que si

$$\int |x|^k d\mu(x) \leq C^k,$$

pour une certaine constante $C > 0$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int x^k d\mu(x).$$

3. Sous les hypothèses de la question 2), montrer que si ν est une mesure de probabilité telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int x^k d\mu(x) = \int x^k d\nu(x)$$

alors $\mu = \nu$.

Exercice 6. ♣♣ *Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la transformée de Laplace complexe de X par*

$$\Lambda(z) = \mathbb{E}\left(e^{zX}\right),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{E}|e^{zX}| < +\infty$.
1. On suppose que X suit une loi Gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda^2/2}.$$

2. En déduire que la transformée de Laplace complexe est bien définie sur $\mathbb{C}$ et qu'elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. Conclure par le théorème d'unicité du prolongement analytique que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \Lambda(z) = e^{z^2/2}.$$

Exercice 7. ♣♣ *Soit X une variable aléatoire suivant une loi Gaussienne de variance σ^2, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.*

1. Montrer que φ, la fonction caractéristique de X, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'équation différentielle linéaire suivante:

$$y' = -\sigma^2 t y.$$

2. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}.$$