Correction TD3 de Probabilités

15 Décembre 2015

Correction 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\xi_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \{1,...,n\}$, si $k > n$ alors $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$. Soit maintenant $k \leq n$.

$$\{S = k\} = \bigcup_{\substack{|P|=k \\ P\subset\{1,\dots,n\}}} \{\forall i \in P, \xi_i = 1, \forall j \notin P, \xi_j = 0\}.$$

Comme $\{S_n = k\}$ est une union disjointe d'événements, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{\substack{|P|=k \\ P\subset\{1,\dots,n\}}} \mathbb{P}(\forall i \in P, \xi_i = 1, \forall j \notin P, \xi_j = 0).$$

Or $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes. D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{\substack{|P|=k \\ P\subset\{1,\dots,n\}}} \prod_{i\in P} \mathbb{P}(\xi_i = 1) \prod_{j\notin P} \mathbb{P}(\xi_j = 0) \\
&= \sum_{\substack{|P|=k \\ P\subset\{1,\dots,n\}}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que S_n suit une loi Binomiale de paramètres (n, p).

Correction 2. 1. Comme $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes. On a pour tout $s > 0$,

$$G_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s) = G_{X_1}(s)^n,$$

car les X_i ont même loi. Puisque X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $c \in \mathbb{R}$, on a

$$G_{X_1}(s) = e^{(s-1)c}.$$

D'où,

$$\forall s > 0,\ G_{S_n}(s) = e^{(s-1)nc}.$$

2. $s \in (0, +\infty) \mapsto e^{(s-1)nc}$ est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre nc. Or la fonction génératrice caractérise la loi. Donc S_n suit une loi de Poisson de paramètre nc.

Correction 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{T = n\} = \{\forall k < n,\ \xi_k = 0, \xi_n = 1\}\,.$$

Comme les variables ξ_i sont indépendantes, on obtient

$$\mathbb{P}\left(T = n\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\xi_k = 0\right) \mathbb{P}\left(\xi_n = 1\right).$$

D'où,

$$\mathbb{P}\left(T = n\right) = (1-p)^{n-1} p.$$

On en déduit que T suit une loi géométrique de paramètre p.

Correction 4. 1. Comme $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{itX_k}\right).$$

Comme les X_k sont de même loi, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX_1}\right)^n.$$

Comme X_1 suit une loi Gaussienne standard, on a

$$\mathbb{E}\left(e^{itX_1}\right) = e^{-t^2/2}.$$

D'où,

$$\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = e^{-nt^2/2}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi Gaussienne centrée de variance n. Or la fonction caractéristique caractérise la loi. Donc Y suit la loi $\mathcal{N}(0, n)$.

Correction 5. 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme Y est à valeurs positives, on a obtient pour tout $t \leq 0$

$$\mathbb{P}\left(Y > t\right) = \mathbb{P}\left(Y > 0\right) = 1.$$

Soit maintenant $t > 0$. Puisque les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}\left(Y > t\right) = \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i \leq n,\ X_i > t\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i > t\right).$$

Comme $X_1, ..., X_n$ sont de même loi, on a

$$\mathbb{P}\left(Y > t\right) = \mathbb{P}\left(X_1 > t\right)^n.$$

Or on sait que,

$$\mathbb{P}\left(X_1 > t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq t\right) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y > t) = e^{-n\lambda t}\mathbb{1}_{t\geq 0} + \mathbb{1}_{t<0}.$$

2. La fonction de répartition de Y est

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_Y(t) = \left(1 - e^{-\lambda n t}\right)\mathbb{1}_{t\geq 0}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. On en déduit que Y suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

Correction 6. 1. Soit $x > 0$. L'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^x e^{-t}$ est prolongeable en 0 par continuité et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En l'infini, on a

$$t^x e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt < +\infty.$$

2. On a

$$\int_0^{+\infty} f_{k,\theta}(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-x/\theta}dx.$$

On effectue le changement de variable $t = x/\theta$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_{k,\theta}(x)dx &= \int_0^{+\infty} (\theta t)^{k-1} e^{-t}\theta dt \\ &= \theta^k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt \\ &= \theta^k\Gamma(k-1).\end{aligned}$$

On en déduit que la mesure μ est une mesure de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{\theta^k\Gamma(k-1)}$.

3. Soit f une fonction mesurable positive. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(X+Y\right)\right) = \int f(x+y)e^{-x-y}\mathbb{1}_{x,y\geq 0}dxdy.$$

Soit

$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & (0,+\infty)^2 & \to \\ & & (x,y) & \mapsto & (x, x+y)\,.\end{array}$$

φ est un C^1 difféomorphisme de $(0,+\infty)^2$ dans $V = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < s < t\}$. Sa fonction réciproque φ^{-1}, est donnée par

$$\begin{array}{cccc}\varphi^{-1} & : & \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < s < t\} & \to & (0,+\infty)^2 \\ & & (s,t) & \mapsto & (s, t-s)\,.\end{array}$$

Par le théorème de changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\int f(x+y)e^{-x-y}\mathbb{1}_{x,y\geq 0}dxdy &= \frac{1}{\lambda^2}\int_{(0,+\infty)^2} f(x+y)e^{-\lambda(x+y)}dxdy \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_{\varphi^{-1}(V)} f(x,y)e^{-\lambda(x+y)}dxdy \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_V f(t)e^{-\lambda t}\left|\mathrm{Jac}(\varphi^{-1}(s,t)\right| dsdt.\end{aligned}$$

Or $\left|\mathrm{Jac}(\varphi^{-1}(s,t)\right| = 1$ pour tout $(t,s)\in V$. On en déduit,

$$\mathbb{E}\left(f\left(X+Y\right)\right) = \frac{1}{\lambda^2}\int f(t)e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{0<s<t}dsdt.$$

Par le théorème de Fubini (pour les fonction positives), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(X+Y\right)\right) &= \frac{1}{\lambda^2}\int_{(0,+\infty)} f(t)e^{-\lambda t}\left(\int \mathbb{1}_{0<s<t}ds\right)dt \\ &= \frac{1}{\lambda^2\Gamma(1)}\int f(t)e^{-\lambda t}tdt = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(1)}\int f(t)f_{2,\lambda}(t)dt,\end{aligned}$$

car $\Gamma(1)=1$. Comme l'égalité ci-dessus est valable pour tout fonction f mesurable positives, on en déduit que la loi de Y est la loi $\Gamma(2,\lambda)$.

Correction 7. Soit f une fonction mesurable positive. Comme U et V sont indépendantes, la loi de (U,V) est

$$d\mathbb{P}^{(U,V)} = \mathbb{1}_{0<x,y<1}dxdy.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(Z) &= \mathbb{E}\left(\mu+\sigma\sqrt{-2\log(U)}\cos(2\pi V)\right) \\ &= \int_{(0,1)\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma\sqrt{-2\log x}\cos(2\pi y)\right)dxdy,\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini (pour les fonctions positives), on a

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma\sqrt{-2\log x}\cos(2\pi y)\right)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 f\left(\mu+\sigma\sqrt{-2\log x}\cos(2\pi y)\right)dx\right)dy.$$

En posant $s=\sqrt{-2\log x}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma\sqrt{-2\log x}\cos(2\pi y)\right)dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^{+\infty} f\left(\mu+\sigma s\cos(2\pi y)\right)se^{-\frac{1}{2}s^2}ds\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma x\cos(2\pi y)\right)xe^{-\frac{1}{2}x^2}dxdy.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{array}{rccc}\varphi & : & \mathbb{R}_+^*\times(0,1) & \to & \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_-\times\{0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & \left(x\cos(2\pi y), x\sin(2\pi y)\right).\end{array}$$

φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*\times(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_-\times\{0\}$. On a donc,

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma x\cos(2\pi y)\right)xe^{-\frac{1}{2}x^2}dxdy = \int_{\mathbb{R}_+^*\times(0,1)} g\left(\varphi(x,y)\right)\left|\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y)\right|dxdy,$$

où g est définie pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, par $g(s,t) = f(\mu+\sigma s)e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}$. Par théorème de changement de variable, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times(0,1)} f\left(\mu+\sigma x\cos(2\pi y)\right) xe^{-\frac{1}{2}x^2}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_-\times\{0\}} f(\mu+\sigma s)e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}dsdt.$$

Comme $\lambda_2(\mathbb{R}_-\times\{0\}) = 0$, on a

$$\mathbb{E}f(Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\mu+\sigma s)e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}dsdt.$$

De nouveau, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\mu+\sigma s)e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}dsdt &= \int_{\mathbb{R}} f(\mu+\sigma s)\frac{e^{-\frac{1}{2}s}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}dt\right)ds\\ &= \int f(\mu+\sigma s)\frac{e^{-\frac{1}{2}s}}{\sqrt{2\pi}}ds,\end{aligned}$$

puisque $\int e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}$. On effectue enfin le changement de variable $y = \mu+\sigma s$, on obtient

$$\mathbb{E}f(Z) = \int f(y)\frac{e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dy.$$

Comme cette égalité est vraie pour tout fonction positive mesurable, on en déduit que la loi de Z est

$$d\mathbb{P}^(Z) = \frac{e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dy,$$

c'est-à-dire la loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.