TD3 de Probabilités

15 Décembre 2015

Exercice 1. *(Loi Binomiale) Soient $\xi_1, ..., \xi_n$ des variable aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Quelle est la loi de*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i ?$$

Exercice 2. *(Stabilité de la loi de Poisson) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $c \in \mathbb{R}$.*
1. Calculer la fonction génératrice de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2. En déduire la loi de S_n.

Exercice 3. *(Loi géométrique) Soient $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1]$. Soit*

$$T = \inf \{k \geq 1 : \xi_k = 1\}.$$

Exercice 4. *(Stabilité de la loi Gaussienne) Soient $X_1, .., X_n$, n variables aléatoires Gaussienne standard.*
1. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On rappelle que la fonction caractéristique de la loi Gaussienne standard est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

2. En déduire la loi de Y.

Exercice 5. *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit*

$$Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y > t).$$

On rappelle que la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est

$$F(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

2. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

Exercice 6. *1. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Justifier que cette intégrale est finie.
2. Soient $k, \theta > 0$. On pose

$$\forall x > 0,\ f_{k,\theta}(x) = x^{k-1} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{x>0}.$$

Montrer que la mesure μ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(A) = \int_A c f_{k,\theta}(x) dx$$

est une mesure de probabilité si et seulement si $\frac{1}{c} = \theta^k \Gamma(k-1)$. Une telle mesure est appelée loi gamma de paramètres k, θ, et est notée $\Gamma(k, \theta)$.
3. Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres $\lambda > 0$. Montrer que

$$Z = X + Y,$$

suit une loi Gamma de paramètres $(2, \lambda)$.

Exercice 7. *On définit*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \\ & & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

On rappelle que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$. On note $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \to \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi)$ sa fonction réciproque. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \varphi^{-1}(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \\ (0, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit (X, Y) une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, I_2)$, c'est-à-dire, la loi

$$\gamma_2 = \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi} dx dy.$$

On pose $(R, \Theta) = \psi(X, Y)$.
1. Calculer la loi du couple (R, Θ), puis de R et de Θ.
2. Montrer que R et Θ sont indépendants.

Exercice 8. *Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la loi de*

$$Z = \mu + \sigma\sqrt{2 - \log U} \cos(2\pi V),$$

est une loi Gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2.