TD . Intégration et Probabilités

1 Intégrabilité

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^\alpha$ si $x > 0$. Existe-t-il un réel p tel que $f \in L^p(\mathbb{R})$?
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^{-1/3}$ si $0 < x \leq 1$ et $f(x) = x^{-1}$ si $x > 1$. Existe-t-il un réel p tel que $f \in L^p(\mathbb{R})$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|x|^{-\alpha}$.
   Démontrer que $f \in L^p$ si, et seulement si, $\alpha p < 1$ et en déduire que, pour des réels p_1 et p_2 tels que $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, il existe des fonctions dans L^{p_1} et pas dans L^{p_2}.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}(x)|x|^{-alpha}$. Démontrer que $f \in L^p$ si, et seulement si $\alpha p > 1$ et en déduire que, pour des réels p_1 et p_2 tels que $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$, il existe des fonctions dans L^{p_2} et pas dans L^{p_1}.

2 Découpage

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est de masse totale finie. Soit f une fonction réelle mesurable. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n := \{x \in E : \ n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

1. Démontrer que f est intégrable si, et seulement si,
$$\sum_n n\mu(E_n) < +\infty.$$
2. Démontrer que f est dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$ si, et seulement si,
$$\sum_n n^p \mu(E_n) < +\infty.$$
3. En déduire que si f est dans L^p, alors f est dans L^r pour tout $1 \leq r \leq p$.

3 Cauchy contre Schwartz

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soient f et g deux fonctions mesurables positives de E dans $\mathbb{R}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que
$$\int f d\mu \int g d\mu \geq \mu(E)^2.$$
2. On suppose qu'il existe une fonction intégrable f telle que $1/f$ soit également intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

4 Scheffé contre Lebesgue

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction intégrable et (f_n) une suite de fonctions intégrable. On suppose

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1. Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f, alors (f_n) converge aussi vers f dans L^1. (Indication : on pourra considérer $g_n := \min(f, f_n)$).
2. Soit (f_n) la suite de $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n := n\mathbf{1}_{]0,1/n[} - n\mathbf{1}_{]-1/n,0[}.$$

Montrer que (f_n) converge vers 0 p.p. et que $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 0$. La suite (f_n) converge-t-elle vers 0 dans L^p $(p \geq 1)$?