TD1 de Probabilités

18 Novembre 2015

Exercice 1. ♣*(Intégration par parties Gaussienne)*
1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$. Montrer que pour toute fonction C^1, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, we have

$$\mathbb{E}\left(XF(X)\right)=\sigma^2\mathbb{E}\left(F'(X)\right).$$

2. Calculer les moments de la loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.

Exercice 2. ♣ *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Quelle est la loi de X^2 ?*

Exercice 3. ♣*(Loi arcsin) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $2\cos\left(\pi U\right)$?*

Exercice 4. ♣ *1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que*

$$X\sim m+\sigma N.$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi

$$d\gamma_d=\frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}dx_1...dx_d.$$

*On appelle cette loi la **loi Gaussienne standard de dimension d** et est notée $\mathcal{N}(0,I_d)$.*
(a). Montrer que γ_d est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.
(b). On note $(X_1,...,X_d)$ les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Montrer que que pour tout $i\in\{1,...,d\}$, X_i suit une loi Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.
(c). Soit $\Sigma\in S_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Quelle est la loi de

$$Y=\Sigma X?$$

Exercice 5. ♣*(Loi de Cauchy)*
1. Pour quelle valeur de C la fonction $f(x)=\frac{C}{1+x^2}$ est-elle une densité de probabilité?
On considère alors X une variable aléatoire réelle admettant cette densité. On dit alors que X suit la loi de Cauchy.
2. Pour quelles valeurs réelles de α le moment $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ est-il fini ?

Exercice 6. ♣♣ *Soit* (X,Y) *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{N}(0,I_2)$ *(cf. exercice 5). Soit* (R,Θ) *les coordonnées polaires de* (X,Y)*. Quelle est la loi de* (R,Θ)*? Quelle est la loi de* R*? de* Θ*?*

Exercice 7. ♣♣♣*(Loi du* χ^2*) 1. On rappelle que la fonction* Γ *est définie pour tout* $x>0$ *par*

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt.$$

Justifier que cette intégrale est finie.
2. Soient $k,\theta>0$*. On pose*

$$\forall x>0,\ f_{k,\theta}(x)=x^{k-1}e^{-x/\theta}.$$

A quelle condition sur $c\in\mathbb{R}$*, la mesure* μ *sur* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(A)=\int_A cf_{k,\theta}(x)dx$$

est une mesure de probabilité? On appelle cette loi, loi Gamma de paramètres (k,θ) *et on la note* $\Gamma(k,\theta)$*.*
3. Soit X *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{N}(0,I_d)$ *(cf. exercice 5). Montrer que la loi de* $||X||^2$ *est* $\Gamma(\frac{k}{2},2)$*.*

Exercice 8. ♣ *Calculer puis tracer le graphe des fonctions de répartition des lois suivantes:*
1. Loi de Bernoulli de paramètre $p\in(0,1)$*.*
2. Loi uniforme sur $[0,1]$*.*
3. Loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$*.*

Exercice 9. ♣*(Absence de mémoire de la loi exponentielle)*
Soit X *une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre* $\lambda>0$*. Soient* $t,s>0$*. Montrer que*

$$\mathbb{P}(X>t+s|X>s)=\mathbb{P}(X>t).$$

Exercice 10. ♣♣ *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$*. On note* G *sa fonction de répartition.*
1. Montrer que si pour $a<b$*,* $G(a)=G(b)$ *alors* $\mu(a,b]=0$*.*
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$*,* $\mu\{x\}=G(x)-G(x_-)$*, où*

$$G(x_-)=\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} G(y).$$

Exercice 11. ♣♣
1. Soit μ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$*. On note* G *sa fonction de répartition. On définit* G^{-1} *l'inverse généralisé de* G*, par*

$$\forall t\in(0,1),\ G^{-1}(t)=\inf\{x\in\mathbb{R}:G(x)\geq t\}.$$

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ *et* $t\in(0,1)$*, on a l'équivalence*

$$G^{-1}(t)\leq x \Longleftrightarrow t\leq G(x).$$

2. Soit U *une variable aléatoire de loi uniforme sur* $[0,1]$*. Montrer que* $G^{-1}(U)$ *suit la loi* μ*.*