Correction TD1 de Probabilités

18 Novembre 2015

Correction 1. 1. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(|F(X)|\right) = \int |xf(x)| e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Comme $f(x) = O(e^{\alpha x^2})$ en $\pm\infty$ avec $\alpha < 1/2\sigma^2$, on obtient,

$$\left| xf(x)e^{-x^2/2\sigma^2} \right| = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'après le critère de Riemann, on en déduit

$$\mathbb{E}\left(|XF(X)|\right) < +\infty.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(XF(X)\right) = \int xf(x)e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Soit $M > 0$. Par intégration par parties, on a

$$\int_{-M}^{M} xf(x)e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \left[-\sigma^2 f(x) \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]_{-M}^{M} + \sigma^2 \int_{-M}^{M} f'(x)e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Par le théorème de convergence dominée ($f(x) = O(e^{\alpha x^2})$ et $f'(x) = O(e^{\alpha x^2})$ en $\pm\infty$ avec $\alpha < 1/2\sigma^2$), on obtient,

$$\mathbb{E}\left(XF(X)\right) = \sigma^2 \int f'(x)e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \sigma\mathbb{E}\left(F'(X)\right).$$

2. En appliquant le résultat de la question 1). avec la fonction $f(x) = x^{2p-1}$ où $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathbb{E}X^{2p} = \sigma^2(2p-1)\mathbb{E}X^{2p-2}.$$

Par récurrence on montre

$$\mathbb{E}X^{2p} = \sigma^{2p}(2p-1)(2p-3)...3.1 = \sigma^{2p}(2p)!!,$$

où $(2p)!! = \prod_{i=1}^{p}(2(p-i)+1)$. D'autre part pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}X^{2p+1} = \int x^{2p+1}e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Or $x \mapsto x^{2p+1}e^{-x^2/2\sigma^2}$ est une fonction impaire. D'où,

$$\mathbb{E}X^{2p+1} = 0.$$

Correction 2. Soit f une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}f(X^2) = \int f(x^2)e^{-x^2/2}\frac{dx}{2\pi}.$$

Comme $x \mapsto f(x^2)e^{-x^2/2}$ est une fonction paire, on a

$$\mathbb{E}\left(f(X^2)\right) = 2\int_0^{+\infty} f(x^2)e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On effectue le changement de variable $u = x^2$. On a $dx = \frac{1}{2}u^{-1/2}du$. D'où,

$$\mathbb{E}\left(f(X^2)\right) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-u/2}u^{-1/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$$

Cette égalité étant vraie pour toute fonction mesurable bornée f, on en déduit que la loi de X^2 est

$$\mathbb{P}^{X^2}(du) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u/2}u^{-1/2}\mathbb{1}_{u>0}du.$$

Correction 3. Soit f une fonction mesurable bornée. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}f\left(2\cos\left(\pi U\right)\right) = \int_0^1 f\left(2\cos(\pi x)\right)dx.$$

L'application $\varphi : x \in (0,1) \mapsto 2\cos(\pi x)$ est un C^1-difféomorphisme de $(0,1)$ dans $(-2,2)$, d'inverse $\varphi^{-1} : y \in (-2,2) \mapsto \frac{1}{\pi}\arccos\left(y/2\right)$. Par théorème de changement de variable, on a

$$\mathbb{E}f\left(2\cos\left(\pi U\right)\right) = \int_{-2}^{2} f\left(y\right)\left|\left(\varphi^{-1}\right)'(y)\right|dy.$$

Or pour tout $y \in (-2,2)$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}$. D'où,

$$\mathbb{E}f\left(2\cos\left(\pi U\right)\right) = \int_{-2}^{2} f(y)\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}dy.$$

Cette égalité est vraie pour toute fonction f mesurable bornée. La loi de $Y = 2\cos(\pi U)$ est

$$\mathbb{P}^Y(dy) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-y^2}}\mathbb{1}_{|y|\leq 2}dy.$$

Correction 4. 1. Soit f une fonction mesurable bornée. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(m+\sigma N\right)\right) = \int f\left(m+\sigma x\right)e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On effectue le changement de variable $y = m + \sigma x \iff x = \frac{y-m}{\sigma}$. On obtient

$$\mathbb{E}f\left(m+\sigma N\right) = \int f(y)e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \mathbb{E}f(X),$$

ce qui montre que $X \sim m + \sigma N$. 2. (a). On a

$$\gamma_d\left(\mathbb{R}^d\right) = \int \frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{i=1}^d dx_i = \int \prod_{i=1}^d \frac{e^{-x_i^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx_i.$$

D'après le théorème de Fubuni-Tonnelli, on a

$$\gamma_d\left(\mathbb{R}^d\right) = \prod_{i=1}^d \int \frac{e^{-x_i^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx_i = \left(\int e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right)^d = 1,$$

car $\int e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.
(b). Soit $i \in= \{1, ..., d\}$. Soit f une fonction mesurable positive. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E} f\left(X_i\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x_i\right) \frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dx_1 ... dx_d.$$

Or d'après le théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f\left(X_i\right) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_i) e^{-x_i^2/2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} x_i^2}}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j\neq i} dx_j\right) dx_i. \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} x_j^2}}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j\neq i} dx_j\right) f(x_i) e^{-x_i^2/2} dx_i \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x_i) e^{-x_i^2/2} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que γ_{d-1} est une mesure de probabilité. La dernière égalité montre que X_i suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
(c). Soit f une fonction mesurable bornée. D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E} f\left(\Sigma X\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\Sigma x\right) \frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dx_1 ... dx_d.$$

On effectue le changement de variable (linéaire) $y = \Sigma x$. On obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f\left(\Sigma X\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(y\right) \frac{e^{-||\Sigma^{-1} y||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} \left|\det\left(\Sigma^{-1}\right)\right| dy_1 ... dy_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(y\right) \frac{e^{-||\Sigma^{-1} y||^2/2}}{\sqrt{(2\pi)^d \left|\det\left(\Sigma\right)\right|^2}} dy_1 ... dy_d,
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière égalité le fait que $\det(\Sigma^{-1}) = (\det(\Sigma))^{-1}$. On en déduit que la loi de Y est

$$\mathbb{P}^Y(dy) = \frac{e^{-||\Sigma^{-1} y||^2/2}}{\sqrt{(2\pi)^d \left|\det\left(\Sigma\right)\right|^2}} dy_1 ... dy_d.$$

Correction 5. 1. Soit $M > 0$. On a

$$\int_{-M}^{M} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_{-M}^{M}.$$

Par le théorème de convergence monotone, on a

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

On en déduit que f est une densité de probabilité si et seulement si $C = 1/\pi$.
2. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\,|X|^\alpha = \frac{1}{\pi}\int \frac{|x|^\alpha}{1+x^2}dx.$$

Par parité de la fonction $x \mapsto |x|^\alpha/(1+x^2)$, on a

$$\mathbb{E}\,|X|^\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx.$$

Or

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim_0 x^\alpha.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > -1.$$

D'autre part,

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim_{+\infty} x^{\alpha-2}.$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha - 2 < -1.$$

On en déduit que $\mathbb{E}|X|^\alpha < +\infty$ si et seulement si $\alpha > -1$ et $\alpha - 2 < -1$, donc si et seulement si $\alpha \in (-1, 1)$.

Correction 6. Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* \times (-\pi,\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times (-\pi,\pi)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$. On définit $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \to \mathbb{R}_+^* \times (-\pi,\pi)$ son inverse et $\hat{\psi}$ la fonction ψ étendue à $\mathbb{R}^2$ par

$$\hat{\psi}(x,y) = \begin{cases} \psi(x,y) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $(R,\Theta) = \hat{\psi}(X,Y)$.

Soit f une fonction mesurable bornée. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}f(R,\Theta) = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\hat{\psi}(x,y)\right) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dxdy.$$

Comme $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle (conséquence du théorème de Fubini), on a

$$\mathbb{E}f\left(R,\Theta\right) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_-\times\{0\}} f\left(\psi(x,y)\right)\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}dxdy.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient,

$$\mathbb{E}f\left(R,\Theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times(-\pi,\pi)} f(\rho,\theta)e^{-\rho^2/2}\rho d\rho d\theta. \tag{1}$$

On en déduit que la loi du couple (R,Θ) est

$$\mathbb{P}^{(R,\Theta)}(d\rho,d\theta) = \frac{1}{2\pi}\rho e^{-\rho^2/2}\mathbb{1}_{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times(-\pi,\pi)}d\rho d\theta.$$

En choississant une fonction f mesurable bornée positive ne dépendant que de ρ, $f(\rho,\theta)=f(\rho)$ dans l'équation (1), on obtient,

$$\mathbb{E}f(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times(-\pi,\pi)} f(\rho)e^{-\rho^2/2}\rho d\rho d\theta.$$

Par le théorème de Fubini-Tonnelli, et en intégrant suivant θ, on a

$$\mathbb{E}f(R) = \int_0^{+\infty} f(\rho)\rho e^{-\rho^2/2}d\rho.$$

La loi de R est donc

$$\mathbb{P}^R(d\rho) = \mathbb{1}_{\rho>0}\rho e^{-\rho^2/2}d\rho.$$

En choississant une fonction f mesurable bornée positive ne dépendant que de θ dans l'équation (1), on obtient,

$$\mathbb{E}f\left(\Theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times(-\pi,\pi)} f(\theta)e^{-\rho^2/2}\rho d\rho d\theta.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f\left(\Theta\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,\pi]}\left(\int_0^{+\infty} f(\theta)e^{-\rho^2/2}\rho d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{(-\pi,\pi]} f(\theta)d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho d\rho\right). \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,\pi]} f(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière égalité le fait que $\mathbb{P}^R$ est une mesure de probabilité. On en déduit que la loi de Θ est la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$.

Correction 7. 1. Soit $x>0$. L'application $t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto t^xe^{-t}$ est prolongeable en 0 par continuité et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En l'infini, on a

$$t^xe^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt < +\infty.$$

2. On a

$$\int_0^{+\infty} f_{k,\theta}(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x/\theta} dx.$$

On effectue le changement de variable $t = x/\theta$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_{k,\theta}(x)dx &= \int_0^{+\infty} (\theta t)^{k-1} e^{-t} \theta dt \\ &= \theta^k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \\ &= \theta^k \Gamma(k-1).\end{aligned}$$

On en déduit que la mesure μ est une mesure de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k-1)}$.

3. Soit f une fonction mesurable positive. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}f\left(||X||^2\right) = \int f\left(||x||^2\right) \frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dx_1...dx_d.$$

Soit $\varepsilon \in \{-,+\}^d$ et $F_\varepsilon = \prod_{i=1}^d E_{\varepsilon_i}^*$, où $E_+ = \mathbb{R}_+$ et $E_- = \mathbb{R}_{-1}^*$. On a $\mathbb{R}^d = \cup_{\varepsilon \in \{+,-\}^d} F_\varepsilon$. En effectuant le changement de variable $y_i = \varepsilon_i x_i$ pour tout $i \in \{1, ..., d\}$, on a

$$\int_{x \in F_\varepsilon} f\left(||x||^2\right) \frac{e^{-||x||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dx_1...dx_d = \int_{y \in \mathbb{R}_+^d} f\left(||y||^2\right) \frac{e^{-||y||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dy_1...dy_d.$$

Comme $|\{+,-\}^d| = 2^d$, on en déduit

$$\mathbb{E}f\left(||X||^2\right) = 2^d \int_{y \in \mathbb{R}_+^d} f\left(||y||^2\right) \frac{e^{-||y||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dy_1...dy_d.$$

Soit

$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & \mathbb{R}_+^d & \to \mathbb{R}_+ \times E \\ & & y & \mapsto \quad \left(||y||^2, \frac{y_2}{||y||}, ..., \frac{y_d}{||y||}\right),\end{array}$$

où $E = \{(x_2, .., x_d) \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=2}^d x_i^2 \leq 1\}$. Alors φ est une bijection d'inverse,

$$\begin{array}{cccc}\varphi^{-1} & : & \mathbb{R}_+ \times E & \to & \mathbb{R}_+^d \\ & & x & \mapsto & \left(x_1^{1/2}\left(1 - \sum_{i=2}^d x_i^2\right)^{1/2}, x_1^{1/2} x_2, ..., x_1^{1/2} x_d\right).\end{array}$$

Pour tout $x \in \{(x_1, .., x_d) \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=2}^d x_i^2 \leq x_1\}$,

$$\left|\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(x)\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=2}^d x_i^2\right)^{1/2} x_1^{d/2-1}.$$

Par théorème de changement de variable, on a

$$\int_{y\in\mathbb{R}_+^d} f\left(||y||^2\right)\frac{e^{-||y||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}dy_1...dy_d = \int_{\mathbb{R}_+\times E} f\left(x_1\right)\frac{e^{-x_1/2}}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=2}^d x_i^2\right)^{1/2} x_1^{d/2-1}dx_1...dx_d.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonnelli, on a

$$\int_{y\in\mathbb{R}_+^d} f\left(||y||^2\right)\frac{e^{-||y||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}dy_1...dy_d = \left(\int_E \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=2}^d x_i^2\right)^{1/2} dx_2...dx_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}_+} f\left(x_1\right)x_1^{d/2-1}\frac{e^{-||x_1||^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}dx_1\right)$$

Donc

$$\mathbb{E}f\left(||X||^2\right) = c\int_0^{+\infty} f\left(x\right)x^{d/2-1}e^{-x/2}dx = c\int_0^{+\infty} f(x)f_{d/2,2}(x)dx.$$

Cette égalité étant vraie pour toute fonction mesurable f, on a en particulier pour $f=1$,

$$c\int_0^{+\infty} f_{d/2,2}(x)dx = 1.$$

D'après la question 2), on sait que $1/c = 2^d\Gamma\left(d/2-1\right)$. On en déduit que $||X||^2$ suit une loi $\Gamma(d/2,2)$.

Correction 8. 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(X\le t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0, \\ 1-p & \text{si } 0\le t<1 \\ p & \text{si } t\ge 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition de X est

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F(t) = \mathbb{1}_{0\le t<1}(1-p) + \mathbb{1}_{t\ge 1}p.$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Si $t<0$ alors $\mathbb{P}\left(X\le t\right)=0$. Pour tout $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(X\le t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t & \text{si } 0\le t\le 1 \\ 1 & \text{si } t\ge 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ est donc

$$\forall t\in\mathbb{R}, F(t) = \mathbb{1}_{t\ge 0}\left(1-e^{-\lambda t}\right).$$

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Soit $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X\le t\right) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t \\ &= 1-e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ est donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \mathbb{1}_{t\geq 0} t \wedge 1.$$

Correction 9. Soient $t, s > 0$. On a

$$\mathbb{P}(X > t+s) = \int_{t+s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Soit $M > t+s$. On a

$$\begin{aligned}\int_{t+s}^{M} \lambda e^{-\lambda x} dx &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{t+s}^{M} \\ &= e^{-\lambda(t+s)} - e^{-\lambda M}.\end{aligned}$$

On obtient par le théorème de convergence monotone en faisant tendre M vers $+\infty$,

$$\int_{t+s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda(t+s)}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X > t+s) = e^{-\lambda(t+s)}.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t} \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X > s) = e^{-\lambda s}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\,\mathbb{P}(X > s).$$

Comme $\mathbb{P}(X > s) > 0$, on obtient,

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Correction 10. 1. On a, puisque μ est une mesure de probabilité,

$$\begin{aligned}\mu(a,b] &= \mu\left((-\infty,b] \setminus (-\infty,a]\right) \\ &= \mu(-\infty,b] - \mu(-\infty,a] \\ &= G(b) - G(a) = 0.\end{aligned}$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a, par le même argument qu'à la question 1),

$$\mu(x - \frac{1}{n}, x] = G(x) - G\left(x - \frac{1}{n}\right).$$

Or $(\left(x - \frac{1}{n}, x\right])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensemble et $\{x\} = \cap_{n\geq 1}\left(x - \frac{1}{n}, x\right]$. Comme μ est une mesure de probabilité,

$$\mu\{x\} = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(x - \frac{1}{n}, x\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(G(x) - G\left(x - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Comme G est croissante et que la limite d'une suite décroissante et minorée est finie, on a que

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} G(y)$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et est finie. D'où

$$\mu\{x\} = G(x) - \lim_{n\to+\infty} G\left(x - \frac{1}{n}\right) = G(x) - G(x_-).$$

Correction 11. 1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in (0,1)$. Si $t \leq G(x)$, alors par définition de l'infimum d'un ensemble, on a $G^{-1}(t) \leq x$.
Supposons maintenant que $G^{-1}(t) \leq x$. Si $G^{-1}(t) < x$, alors par définition de l'infimum d'un ensemble, il existe $x' \in \mathbb{R}$ tel que $G(x') \geq t$ et $G^{-1}(t) \leq x' < x$. Comme G est croissante, on a

$$t \leq G(x') \leq G(x).$$

Si $G^{-1}(t) = x$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $G(x_n) \geq t$ et

$$x = G^{-1}(t) = \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

Comme G est continue à droite, et que $x_n \geq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$, on a, en passant à la limite dans l'inégelité $G(x_n) \geq t$,

$$G(x) \geq t.$$

On a bien montré l'équivalence,

$$G(x) \geq t \Longleftrightarrow G^{-1}(t) \leq x.$$

2. Soit F la fonction de répartition de $G^{-1}(U)$. Nous allons montrer que $F = G$. Comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi, on aura bien montré que $G^{-1}(U)$ suit la loi μ. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \mathbb{P}\left(G^{-1}(U) \leq x\right).$$

Or d'après la question 1),

$$\left\{\omega : G^{-1}(U(\omega)) \leq x\right\} = \left\{G(x) \geq U(\omega)\right\}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}\left(G^{-1}(U) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(G(x) \geq U\right).$$

Comme $G(x) \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}\left(G(x) \geq U\right) = G(x).$$

On en conclut que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.