Correction TD

Mardi 10 Novembre

Exercice 1. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathbb{1}_{x>0} x^{\alpha}.$$

f est continue par morceaux donc f est mesurable pour la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ et elle est positive donc l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

est bien définie.

Soit $p \geq 1$. On a

$$\int_0^1 x^{p\alpha} dx < +\infty \Longleftrightarrow p\alpha > -1,$$
$$\int_1^{+\infty} x^{p\alpha} dx < +\infty \Longleftrightarrow p\alpha < -1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p dx < +\infty &\Longleftrightarrow \int_0^1 x^{p\alpha} dx < +\infty \text{ et } \int_1^{+\infty} x^{p\alpha} dx < +\infty \\ &\Longleftrightarrow p\alpha > -1 \text{ et } p\alpha < -1.\end{aligned}$$

Donc $f \notin L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

2. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^{-1/3} \mathbb{1}_{0<x\leq 1} + x^{-1} \mathbb{1}_{x>1}.$$

Soit $p \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p dx < +\infty &\Longleftrightarrow \int_0^1 x^{-p/3} dx < +\infty \text{ et } \int_1^{+\infty} x^{-p} dx < +\infty \\ &\Longleftrightarrow p/3 < 1 \text{ et } p > 1.\end{aligned}$$

Donc $f \in L^p(\mathbb{R})$ si et seulement si $p \in (1,3)$.

3. On a

$$\int f^p(x) dx = \int_{-1}^1 |x|^{-p\alpha} dx.$$

Or $x \mapsto x^{-p\alpha}$ est paire. Donc

$$\int f^p(x) dx = 2 \int_0^1 x^{-p\alpha} dx.$$

Donc

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \iff \int_0^1 x^{-p\alpha} dx < +\infty$$
$$\iff p\alpha < 1.$$

Soient $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$. Soit $\alpha \in [\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1})$. Soit $f(x) = \mathbb{1}_{x\in[-1,1]} x^{-\alpha}$. Comme $\alpha p_1 < 1$ on a que $f \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, mais comme $\alpha p_2 \geq 1$, $f \notin L^{p_2}(\mathbb{R})$.

4. Soit $p \geq 1$. Puisque f est paire,

$$\int f(x)^p d\lambda(x) = 2\int f(x)^p dx = 2\int_1^{+\infty} x^{-p\alpha} dx.$$

Donc

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \iff p\alpha > 1.$$

Soient $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$. Soit $\alpha \in (\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1}]$. Soit $f = \mathbb{1}_{|x|>1} x^{-\alpha}$. On a alors $p_2\alpha > 1$ et $p_1\alpha \leq 1$, donc $f \in L^{p_2}(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^{p_1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. 1. On a l'encadrement

$$n\mathbb{1}_{x\in E_n} \leq |f(x)|\mathbb{1}_{x\in E_n} < (n+1)\mathbb{1}_{x\in E_n}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$0 \leq n\mu(E_n) \leq \int_{E_n} |f| d\mu < (n+1)\mu(E_n).$$

On en déduit l'encadrement des séries à termes positifs suivant

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} |f| d\mu < \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\mu(E_n).$$

Or d'après le théorème de convergence monotone (ou théorème de Fubini),

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} |f| d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} |f|\mathbb{1}_{E_n} d\mu = \int |f| d\mu,$$

où on a utilisé dans la dernière égalité le fait que les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une partition de E. D'où,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) \leq \int |f| d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\mu(E_n).$$

Comme $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de E, on a $\mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$. D'où

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) + \mu(E).$$

Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) \leq \int |f| d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) + \mu(E).$$

Comme $\mu(E) < +\infty$, on conclut

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu(E_n) < +\infty \iff \int |f| d\mu < +\infty.$$

2. Soit $1 \leq p < +\infty$. Comme $x \mapsto x^p$ est strictement croissante sur $[0, +\infty)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{x \in E : n^p \leq |f(x)|^p < (n+1)^p\}.$$

Par les mêmes arguments que pour la question 1), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n) \leq \int |f| d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^p \mu(E_n).$$

Or $(n+1)^p \leq 2^p n^p + 1$. D'où,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n) \leq \int |f| d\mu \leq 2^p \sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n) + \mu(E).$$

On en déduit,

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n) < +\infty.$$

3. Soient $1 \leq r \leq p$. On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^r \leq n^p$. D'où

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^r \mu(E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n).$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors d'après la question 2), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p \mu(E_n) < +\infty.$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^r \mu(E_n) < +\infty.$$

En utilisant encore une fois la question 2), on conclut que $f \in L^r(\mathbb{R})$.

Exercice 3. 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, puisque $f, g \geq 0$,

$$\left(\int \sqrt{f}\sqrt{g} d\mu\right)^2 \leq \left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right).$$

Or $fg \geq 1$, d'où

$$\mu(E)^2 \leq \left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right).$$

2. S'il existe une fonction mesurable f telle que f et $1/f$ soient intégrables, alors en appliquant l'inégalité ci-dessus à $|f|$ et $1/|f|$, on obtient

$$\mu(E)^2 \leq \left(\int |f| d\mu\right)\left(\int \frac{1}{|f|} d\mu\right) < +\infty.$$

Donc μ est une mesure finie.

Exercice 4. 1. Soit $g_n = \min(f, f_n)$. On a alors que

$$g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{p.s.}$$

et on a la majoration $0 \leq g_n \leq f$. Comme f est dans L^1, on en déduit par le théorème de convergence dominée,

$$\int g_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int |f_n - f| \, \mu &= \int (f_n - f) \, \mathbb{1}_{f_n \geq f} d\mu + \int (f - f_n) \, \mathbb{1}_{f > f_n} d\mu \\ &= \int (f_n - g_n) \, \mathbb{1}_{f_n \geq f} d\mu + \int (f - g_n) \, \mathbb{1}_{f > f_n} d\mu \\ &= \int f_n d\mu + \int (f - f_n) \mathbb{1}_{f > f_n} d\mu - \int g_n d\mu. \end{aligned}$$

Or par hypothèse,

$$\int f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

D'autre part, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s vers f, on a

$$(f - f_n)\mathbb{1}_{f_n > f} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et $0 \leq (f - f_n)\mathbb{1}_{f > f_n} \leq f$. Comme f est dans L^1, on obtient d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int (f - f_n)\mathbb{1}_{f > f_n} d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit par le théorème des gendarmes,

$$\int |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1/N_0 \leq |x|$. Alors pour tout $n \geq N_0$, on a $1/n \leq 1/N_0 \leq |x|$, donc

$$f_n(x) = 0.$$

De plus, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \; p.p.$$

Par ailleurs, f_n est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\int f_n(x) dx = 0.$$

Soit $p \geq 1$. On a

$$\int |f_n(x)|^p dx = 2n^p \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers 0 dans aucun des espaces $L^p(\mathbb{R})$.