**Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)** **Année universitaire**
**Département de mathématiques** **2019-2020**
**L2 Maths, UE d'Analyse numérique**

# Contrôle Continu, Méthodes Numériques- Correction et barême

**Durée : 1 heure 30 - Calculatrices, portables interdits, une page A4 recto-verso de notes autorisée.**

*La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.*

**Exercice 1.** Vrai ou Faux[/4], 1pt par question
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.
On considère des réels deux à deux distincts $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$.

a. Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions continues qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ et $P_1,\ P_2$ les polynômes d'interpolation de Lagrange respectifs de $f_1$ et $f_2$ en $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$. Alors $P_1/P_2$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f_1/f_2$ aux points $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$.
**Correction : FAUX** En général, $P_1/P_2$ ne sera pas un polynôme mais un effraction rationnelle. Contre exemple : $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x^2 + 1$, alors $P_1(X) = 1,\ P_2(X) = X^2 + 1$ et $P1/P2 = 1/(1 + X^2)$ n'est bien sûr pas un polynôme.

b. Si $L_k$ désigne le $k$-ème polynôme de la base de Lagrange associée à $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$, pour $k = 0 \dots 3$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{3} x_k^3\ L_k(x) = x^3.$$
**Correction : VRAI**. En effet, le polynôme
$$P(X) = \sum_{k=0}^{3} x_k^3\ L_k(X)$$
est par définition le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $x \mapsto x^3$ aux points $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$. On a donc $P(X) = X^3$ ce qui permet de conclure que cette égalité est vraie.

c. La méthode d'intégration numérique suivante sur l'intervalle $[1, 3]$ est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 :
$$J_{[1,3]}(f) = \frac{1}{6}f(1) + \frac{2}{3}f(2) + \frac{1}{6}f(3).$$
**Correction : FAUX.** En effet, le polynôme constant égal à 1 l'égalité est fausse : la méthode donne 1 alors que l'intégrale vaut 2.

d. La valeur approchée de $\int_0^\pi \cos(x)dx$ obtenue en appliquant la méthode des trapèzes composites avec 4 intervalles de même longueur est 0.

**Correction : VRAI.** La méthode des trapèzes composites avec 3 intervalles de même longueur donne

$$J = \frac{\pi}{8}\left(\cos 0 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\pi\right) = 0$$

**Exercice 2.** (Questions de cours et d'application directe)[/3]

1. On considère des réels deux à deux distincts $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$. Expliciter la famille des polynômes de Newton associée aux points $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ et montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
**Correction (2pt) :** La famille de Newton associée à ces points est d'après le cours

$$\{1, X - x_0, (X - x_0)(X - x_1), (X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)\}.$$

Elle contient 4 éléments et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc il suffit de montrer que c'est une famille libre pour montrer qu'elle forme un base de $\mathbb{R}_3[X]$.
IL EST FAUX DE DIRE que cela fait d'elle une famille génératrice...
Supposons pour cela trouvés 4 réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_3$ tels que

$$\alpha_0 + \alpha_1(X - x_0) + \alpha_2(X - x_0)(X - x_1) + \alpha_3(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2) = 0.$$

En évaluant successivement en $X = x_0$, $X = x_1$ puis $X = x_2$ et finalement $X = x_3$, les points $x_i$ étant deux à deux distincts on obtient $\alpha_0 = 0$, puis $\alpha_1 = 0$ etc.

2. Donner la formule pour la méthode du point milieu sur l'intervalle $[-1, 2]$ ainsi qu'une preuve de son degré d'exactitude.
**Correction (1pt) :** La méthode du point milieu s'écrit, pour l'approximation de l'intégrale sur $[-1, 2]$ :

$$J_{[-1,3]}(f) = 4\,(f(2)).$$

On vérifie que cette méthode est exacte pour $f = 1$, $f(x) = x$ et inexacte pour $f(x) = x^2$, ce qui montre que le degré d'exactitude de la méthode est 1. (voir cours pour plus de détail)

**Exercice 3.** (Un vrai polynôme à calculer)[/6]

Considérons les points d'interpolations suivants : $X = [-1, 0, 1, 2],\ Y = [-1, 1, 0, 0]$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à ces points en utilisant les méthodes suivantes :

1. par une méthode de résolution de système $4 \times 4$.
**Correction (1.5pt) :** On cherche $P$ de degré inférieur ou égal à 3 qui interpole les points $(X, Y)$. On le cherche sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, les coefficients $a, b, c,\ d$ sont tels que

$$P(-1) = -1,\ P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P(2) = 0$$

ce qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} -a + b - c + d = -1, \\ d = 1, \\ a + b + c + d = 0, \\ 8a + 4b + 2c + d = 0. \end{cases}$$

ce qui fournit finalement $P(X) = \frac{2}{3}X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{6}X + 1$.

2. par une méthode de factorisation.
   **Correction (1.5pt) :** On utilise le fait que $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et admet 1 et 2 pour racines. Ainsi, il s'écrit sous forme factorisée

$$P(X) = (X-1)(X-2)(aX+b).$$

   Les réels $a$ et $b$ vérifient alors :

$$\begin{cases} 6(-a+b) = -1, \\ 2b = 1. \end{cases}$$

   et finalement on obtient $P(X) = (X-1)(X-2)\left(\frac{2}{3}X + \frac{1}{2}\right)$.
3. dans la base de Lagrange associées aux points $X$.
   **Correction (1.5pt) :** L'expression du polynôme $P$ dans la base de Lagrange est donnée par $P(X) = -L_0(X) + L_1(X)$. Reste à calculer $L_0$ et $L_1$ avec les formules de la base de Lagrange (voir cours) et l'on obtient finalement :

$$P(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) + \frac{1}{2}(X+1)(X-1)(X-2).$$

   J'en profite pour rappeler qu'il est INUTILE ET MEME NEFASTE de développer $L_0$ et $L_1$.
4. dans la base de Newton associée aux points $X$.
   **Correction (1.5pt) :** Le calcul du tableau des différences divisées donne :

| $x_i$ | $f(x_i)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $-1$ | | | |
| $0$ | $1$ | $2$ | | |
| $1$ | $0$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | |
| $2$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ |

   et donc, dans la base de Newton, $P$ s'écrit

$$P(X) = -1 + 2(X+1) - \frac{3}{2}(X+1)X + \frac{2}{3}X(X+1)(X-1).$$

**Exercice 4.** (Interpolation de Lagrange et approximation)[/5pts]
Considérons $n+1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ \dots, x_n$ de l'intervalle $[-1,1]$, un réel $\alpha \neq 1$ et la fonction $f$ définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \ f(x) = \frac{1}{x-\alpha}.$$

Soit $L_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_0, \dots, x_n$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction $f$.
   **Correction (1pt) :** On montre par récurrence que la dérivée $k$-ème de $f$ est donnée par

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x-\alpha)^{k+1}}.$$

2. Montrer que si $\alpha > 3$, quelque soit le choix des points $x_0, \dots, x_n$ de l'intervalle $[-1,1]$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| = 0.$$
**Correction (2pt) :** On a vu en cours que l'erreur d'approximation de $f$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \dots x_n$ s'écrit : pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi \in ]-1,1[$ tel que
$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$
Soit $x \in [-1,1]$ fixé et $\xi \in ]-1,1[$ associé, en rempliçant $f^{(n+1)}(\xi)$ par sa formule trouvée dans la question 1, et en prenant les valeurs absolues, on obtient :
$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{(n+1)!}{(n+1)!|\xi-\alpha|^{n+2}} \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| = \frac{1}{|\xi-\alpha|} \prod_{k=0}^{n} \left|\frac{x-x_k}{\xi-\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|\frac{2}{\xi-\alpha}\right|^{n+1}.$$
Il reste à voir que, comme $x,\ x_k \in [-1,1]$, alors $|x - x_k| \leqslant 2$ et, si $\alpha > 3$ et $\xi \in ]-1,1[$, alors $|\xi - \alpha| > 2$. Alors, pour tout $k = 0, \dots, n$, on a $\frac{2}{\xi-\alpha} < 1$, d'où
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{1}{4}\left|\frac{2}{\xi-\alpha}\right|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Considérons maintenant que les points $x_0, \dots,\ x_n$ sont choisis équirépartis dans $[-1,1]$. On définit sur chaque $i = 0, \dots, n-1$, la fonction $f_i$ comme le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ associé aux points $x_i, x_{i+1}$. Donner son expression.
**Correction (1pt) :** Pour $i = 0, \dots n-1$, et $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a :
$$f_i(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i).$$

4. On appelle $f_n$ la fonction définie par morceaux grâce aux fonctions $f_i$ précédentes par :
$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = f_i(x) \text{ où } i \text{ est l'entier tel que } x \in [x_i,\ x_{i+1}].$$
Montrer que, si $\alpha \notin [-1,1]$, il existe $C > 0$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^2}$.

*Indication : On pourra estimer pour tout $i = 0 \dots n-1$ l'erreur* $\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x) - f_i(x)|$.
**Correction (1pt) :** On se place sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i$ étant un entier fixé entre 0 et $n-1$ et l'on applique l'erreur d'interpolation de $f$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $x_i$ et $x_{i+1}$.
Ainsi : pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il existe $\xi_i \in ]x_i, x_{i+1}[$ tel que
$$f(x) - f_i(x) = \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}).$$
Des lors, comme $f''$ est bornée par 2 sur $[-1,1]$ dès que $\alpha \notin [-1,1]$, et
$|x - x_k| \leqslant |x_{i+1} - x_i| \leqslant \frac{2}{n}$, alors :
$$|f(x) - f_i(x)| \leqslant 2|x - x_i||x - x_{i+1}| \leqslant \frac{8}{n^2}.$$
Cette inégalité étant vraie sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on a l'inégalité demandée.

**Exercice 5.** (Autour de la méthode des trapèzes.)[/4pt]
On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

1. Calculer la valeur exacte de $I$.
   **Correction (1pt) :** $I = \ln(2)$.
2. Évaleur numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes composites avec $n = 3$ sous-intervalles de même longueur.
   **Correction (1pt) :** Les 3 sous-intervalles de même longueur sont $\left[1, \frac{4}{3}\right]$, $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ et $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$. La méthode des trapèzes composite sur cette subdivision donne alors

$$I \approx \frac{1}{6}\left(1 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{10}.$$

3. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$ (On pourra s'aider d'un dessin) ?
   **Correction (2pt) :** La valeur obtenue est supérieure à $\ln 2$ car, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant convexe, son graphe est situé au dessous de toutes ses cordes, en particulier, il est situé, sur chaque sous intervalle, au dessous du segment qui permet de calculer l'aire du trapèze utilisé dans la méthode des trapèzes composites. Ainsi, l'approximation sur chaque sous intervalle est supérieure à la valeur de l'intégrale sur chaque sous-intervalle, et cela reste vrai en sommant.
4. Donner une estimation de l'erreur des trapèzes composite en fonction du nombre $N$ de sous-intervalles de $[1, 2]$.
   **Correction (1pt) :** C'est la formule du cours : l'erreur de la méthode composite à $N$ sous-intervalles est majorée par $C \sup_{x\in[1,2]} |f''(x)| \frac{1}{N^2}$ où $C$ est une constante positive.

**Exercice 6.** (Une méthode d'intégration numérique)[/3 pts]
On souhaite approcher, pour toute fonction régulière $f$, l'intégrale de $f$ sur $[-1, 1]$ par la méthode

$$J(f) = \lambda_0 f\left(\frac{-1}{2}\right) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer $\lambda_0$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ pour que $J$ soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   **Correction (1.5pt) :** Pour garantir que la méthode est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, il suffit qu'elle soit exacte pour les polynômes de la base canonique $\{1, X, X^2\}$. Cela nous fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \int_{-1}^1 dx = 2, \\ -\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \int_{-1}^1 x dx = 0, \\ \frac{\lambda_0}{4} + \frac{\lambda_2}{4} = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

   ce qui donne finalement

$$J(f) = \frac{4}{3} f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Quel est alors le degré d'exactitude de la méthode ?
   **Correction (1.5 pt) :** On sait d'après ce qui précède qu cela méthode est de degré d'exactitude au moins 2. Elle est aussi exacte pour $X^3$ par imparité et car $\lambda_0 = \lambda_2$. Reste à calculer pour $X^4$ :

$$J(X^4) = \frac{1}{16}(\lambda_0 + \lambda_2) = \frac{1}{6} \neq \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

   Donc la méthode est de degré d'exactitude 3.