Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L2 Maths — **2018-2019**
U.E. Méthodes Numériques

Contrôle Continu, Méthodes Numériques

Durée : 1 heure 30 - Calculatrices, portables et tout document interdits

La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. QCM et questions de cours
Sélectionner parmi les réponses proposées la (ou les) bonne(s) réponse(s) aux questions suivantes.

1. Lequel de ces polynômes appartient à la base de Lagrange associée aux points $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ et $x_3 = 2$?
   a. $(-X^3 + X^2 + 2X)/2$
   b. $X^3 - X$
   c. $(-X^3 + X)/2$
   d. $-X^3 + 2X$
   e. $(X^3 - 2X)/2$
2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne trois réels x_0, x_1 et x_2 distincts deux à deux, et on note p_1 (resp. p_2) le polynôme d'interpolation de Lagrange à f_1 (resp. f_2) en x_0, x_1 et x_2. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont **toujours** vraies ?
   a. $p_1\,p_2$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $f_1\,f_2$ aux points x_0, x_1, x_2
   b. $\mathsf{deg}(p_2) = 2$
   c. $p_2 - p_1$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $f_2 - f_1$ aux points x_0, x_1, x_2
   d. $f_2(x_k) = x_k^3$ pour $k \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow p_2(x) = x^3$
   e. $f_1(x_k) = 1$ pour $k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow p_1 = 1$
   f. $(p_1)^2$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $(f_1)^2$ aux points x_0, x_1, x_2
3. On considère les abscisses $x = [-2, 0, 1, 2]$ et les valeurs $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, le(s)quel(s) est (sont ?) le(s) polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x, y ?
   a. $p_1(X) = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3X^2 + \frac{8}{3}X$
   b. $p_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$
   c. $p_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$.
4. Étant donnés $d+1$ réels distincts $x_0, \ldots, x_d$ et $(L_0, \ldots, L_d)$ la base de Lagrange associée, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{d} L_k(x) = d + 1$.
5. Étant donné un intervalle $[a, b]$, un entier $d \geqslant 0$ et $d + 1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_d \in [a, b]$, énoncer le théorème d'approximation d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^{d+1}([a, b])$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_d$.

Exercice 2. (Questions de cours et d'application directe)
On considère des réels deux à deux distincts $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$.

1. Expliciter la famille des polynômes de Lagrange associée aux points $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ et montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Même question avec la base de Newton.
3. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x = [-3, 1, -1, 2]$ et $y = [2, 5, -1, 0]$ dans la base de Newton.

Exercice 3. (Un vrai polynôme à calculer)
Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X = [-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$, et $Y = [-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0]$

Exercice 4. (Et si... on impose une dérivée ?)
Étant donnés trois réels y_0, y_1 et z_1, on s'intéresse au problème d'interpolation suivant :

$$\text{Trouver un polynôme } P \text{ de degré minimal tel que } P(0) = y_0,\ P(1) = y_1,\ P'(1) = z_1.$$

Pour cela, on va procéder en plusieurs étapes.

1. Montrer qu'il existe un unique tel polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 et exprimer ses coefficients en fonction de y_0, y_1 et z_1.
2. Dans l'idée d'avoir éventuellement beaucoup plus de points, on cherche une base de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée au problème.
   a. Déterminer trois polynômes notés respectivement H_0, H_1 h_1 tels que

$$\begin{cases} H_0(0) = 1,\ H_0(1) = H_0'(1) = 0, \\ H_1(0) = H_1'(1) = 0,\ H_1(1) = 1, \\ h_1(0) = h_1(1) = 0,\ h_1'(1) = 1. \end{cases}$$

   b. Montrer que la famille (H_0, H_1, h_1) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   c. Exprimer P dans la base (H_0, H_1, h_1).

Exercice 5. (Approximation et polynôme d'interpolation de Lagrange.)
On considère $a = x_0,\ x_1, \ldots, x_d = b$, deux à deux distincts et le polynôme P_d d'interpolation de Lagrange de la fonction exponentielle. Montrer que :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_d(x)| \underset{d\to\infty}{\longrightarrow} 0$$