Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)
Département de mathématiques
L2 Maths, UE d'Analyse numérique

Année universitaire 2019-2020

Feuille de TD 2 : Méthodes d'intégration numérique

Exercice 1. (Une méthode sur $[-1, 1]$)
Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $x_1 < x_2$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On définit, pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

1. Montrer que T est exacte d'ordre au moins 1 sur $[-1, 1]$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$.
2. Pour quelles valeurs de λ_1, λ_2, x_1 et x_2, T est-elle au moins exacte d'ordre 3 ? Quel est alors l'ordre d'exactitude de la méthode ?
3. Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration d'ordre 3 sur un segment $[a, b]$ quelconque.

Exercice 2. (De l'interpolation à l'intégration numérique)
Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient $x_0,\ x_1 \in [-1, 1]$ avec $x_0 \neq x_1$.

1. Interpolation de Lagrange aux noeuds $x_0,\ x_1$:
   a. Donner l'expression du polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds x_0, x_1 dans la base de Lagrange.
   b. Donner la formule d'erreur d'approximation de Lagrange $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_1(x)|$ en fonction de $M = \sup\limits_{z \in [-1,1]} |f''(z)|$.
2. On considère la méthode d'intégration numérique sur $[-1, 1]$ suivante pour approcher $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$:
$$J(f) = \int_{-1}^{1} P_1(x)\, dx.$$
   a. Monter qu'il existe $\lambda_0,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que $J(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1)$.
   b. Donner une majoration de l'erreur $|I(f) - J(f)|$ en fonction de M.

Exercice 3. (Exam 2016)
Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. A l'aide d'un développement de Taylor de la fonction
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\int_0^1 f(t)\, dt = f(0) + \frac{f'(c)}{2}$.

2. On propose d'approcher l'intégrale $I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ par une formule du type

$$J(f) = f(0) + \frac{f'(\alpha)}{2}$$

pour $\alpha \in]0,1[$ à déterminer.

   a. Montrer que J est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quelque soit le choix de $\alpha \in]0,1[$.

   b. Déterminer α pour que l'approximation $J(f)$ soit exacte pour les polynômes de degré au plus égal à deux.

   c. Pour le choix de α de la question 2-b), quel est l'ordre d'exactitude de la méthode ?

3. On fixe pour la suite α comme à la question 2-b).
On suppose que $f \in C^3([0,1])$. A l'aide d'un développement de Taylor de $F(x)$, montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que

$$I(f) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{24}f^{(3)}(d).$$

A l'aide d'un développement de Taylor de $f'(\alpha)$, montrer alors que

$$|I(f) - J(f)| \leqslant \frac{5}{72} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|.$$

4. Soient $h > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $[a, a+h] \subset [0,1]$.

   a. On note f_h la fonction définie par $f_h(t) = f(a+th)$, montrer que :

$$\int_a^{a+h} f(t)\,dt = h \int_0^1 f_h(t)\,dt.$$

   b. À partir des questions précédentes, proposer une formule d'approximation $J_{a,h}(f)$ pour

$$I_{a,h}(f) = \int_a^{a+h} f(t)\,dt$$

   qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux.

   c. Montrer que pour tout $f \in C^3([0,1])$, on a $|I_{a,h}(f) - J_{a,h}(f)| \leqslant \dfrac{5\,h^4}{72} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$.

Exercice 4. (Exam 2019-1)

1. Déterminer dans la base de Newton le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 associé aux noeuds $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. En utilisant la formule de l'erreur d'interpolation, montrer que

$$\forall x \in [1,2],\ |f(x) - P_2(x)| \leqslant (x-1)(2-x)|x - \frac{3}{2}|.$$

Soit $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à approcher l'intégrale $I(g) = \int_1^2 g(x)dx$ par la formule d'intégration numérique $J_2(g)$ suivante :

$$J_2(g) = \lambda_0 g(1) + \lambda_1 g(\frac{3}{2}) + \lambda_2 g(2)$$

3. Donner le système linéaire vérifié par $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ pour que la méthode J_2 soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
4. En déduire les valeurs de $\lambda_0,\ \lambda_1$ et λ_2.
5. Quel est le degré d'exactitude de la méthode ?
6. Déduire de cette étude une valeur approchée de $\ln(2)$. Que pourrait-on faire pour avoir une approximation aussi fine que l'on souhaite ?

Exercice 5. (Exam 2019-2)
On définit une méthode d'intégration numérique d'un fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par
$$J(f) = \lambda_0 f(-\alpha) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\alpha) \text{ où } \alpha \in]0,1].$$
On pose $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$.

1. Déterminer $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ en fonction de α pour que la méthode J soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
2. Écrire la méthode obtenue pour $\alpha = 1$. A quelle méthode du cours correspond-elle ?
3. On suppose dans cette question que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange P_α de f associé aux noeuds $-\alpha,\ 0,\ \alpha$. Donner une estimation de $|f(x) - P_\alpha(x)|$ pour tout $x \in [-1,1]$. En déduire une estimation de $|J(f) - I(f)|$.
4. Déterminer $\alpha \in]0,1]$ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré supérieur à 2. Quel degré d'exactitude obtient-on pour cette méthode ?
5. On veut écrire une méthode d'intégration numérique de même degré d'exactitude pour calculer l'intégrale d'une fonction sur $[0,1]$. Déduire d'un changement de variable bien choisi les valeurs de a et $b \in [0,1]$ tels que $\tilde{J}(f) = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(b)\right)$ soit de même degré d'exactitude.
6. En utilisant le degré d'exactitude de la méthode, quel serait l'ordre de grandeur de l'erreur de la méthode composite associée pour une discrétisation de $[0,1]$de pas h ? Écrire cette méthode composite.