Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TD 3 : Résolution approchée de systèmes linéaires. Méthodes itératives, Moindres carrés

Exercice 1. (Rayon spectral, convergence de suites et séries de matrices)
Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\rho(A) < 1$ les matrices $\mathrm{Id} - A$ et $\mathrm{Id} + A$ sont inversibles.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k \geqslant 0}$ tend vers la matrice nulle quand k tend vers l'infini.
3. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la série de terme général A^k converge vers $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$. Montrer de plus que
$$\|(\mathrm{Id} - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Exercice 2. (Quelques exemples de convergence comparée)
Soit J (respectivement G) la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi (respectivement Gauss-Seidel) pour la résolution du système linéaire $AX = b$. Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'en toute généralité, les deux méthodes ne sont pas comparables.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Écrire les itérations de Jacobi et de Gauss Seidel et montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(G)$.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Écrire les itérations de Jacobi et de Gauss Seidel et calculer $\rho(G)$ et $\rho(J)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3. (Diagonales dominantes...)
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ une matrice à diagonale strictement dominante c'est-à-dire telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Montrer que A est inversible puis que la méthode de Jacobi (pour calculer la solution de $AX = b$) converge.

Exercice 4. (Le retour des matrices symétriques définies positives)
Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On cherche à résoudre le système linéaire $AX = b$ avec $b \in \mathbb{R}^N$ un vecteur donné par la méthode itérative

$$BX^{(k+1)} + (A - B)X^{(k)} = b, \quad k \geqslant 0 \tag{1}$$

avec $X^{(0)}$ un vecteur initial donné.

1. Supposons que $B = \frac{1}{\alpha} I_N,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$. A quel intervalle doit appartenir α pour que la suite $(X^{(k)})_k$ converge vers la solution de $AX = b$?
2. On note μ_i pour $i = 1 \cdots N$ les valeurs propres de A ordonnées *i.e.* telles que $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_N$. On note $f_\alpha(\mu) = 1 - \alpha\mu$ pour $\alpha \in [0, \frac{2}{\mu}]$ et $\alpha_0 = \frac{2}{\mu_1 + \mu_N}$.
Vérifier que $f_{\alpha_0}(\mu_1) = -f_{\alpha_0}(\mu_N)$.
En déduire que α_0 minimise $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |f_\alpha(\mu_i)|$ pour $\alpha \in [0, \frac{2}{\mu_N}]$.
On pose $B = \frac{1}{\alpha} I_N$. Pour quel α la convergence est-elle la plus rapide ?

Exercice 5. (Éléments propres des matrices tridiagonales...)
On considère la matrice $N \times N$ tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des scalaires non nuls.

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Soit $I = [0, 1]$ et $h = \frac{1}{N+1}$, on pose $x_i = ih$ pour $i = 0 \dots N+1$. Soit u une fonction au moins 4 fois continûment dérivable sur I. Montrer par la formule de Taylor que

$$-u"(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})\right) + \mathcal{O}(h^2), \qquad i = 1, \dots N. \tag{2}$$

On considère l'équation différentielle à valeurs au bord

$$-u"(x) = f(x)\ 0 < x < 1, \text{ et } \quad u(0) = u(1) = 0$$

où f est une fonction donnée. En utilisant l'approximation de $-u"(x_i)$ donnée par (2) en omettant le terme en h^2, montrer que les $u_i,\ i = 1 \dots N$ approximations ainsi obtenues de $u(x_i)$ sont solution d'un système linéaire :

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression d'une telle matrice A.

3. Montrer explicitement que la méthode itérative de Jacobi appliquée su système de la question précédente converge.

Exercice 6. (Méthode des moindres carrés)
Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ un 'nuage' de points. On suppose les x_i distincts. On cherche à calculer la droite d'équation $y = ax + b$ où $a,\ b \in \mathbb{R}$ approchant au mieux ces points au sens où (a, b) minimise la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

1. En se ramenant à un problème de projection, montrer l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de minimisation.
2. En introduisant la fonction $f(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - ax_i - b)^2$ et en calculant sa différentielle, retrouver le résultat de la question précédente et en déduire une méthode pour trouver a et b.