Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TD 4 : Interpolation, Intégration numérique

Exercice 1. (Interpolation de Lagrange)
Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ points distincts d'un intervalle $[a, b]$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$

1. Soit $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des fonctions de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tous $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Montrer que $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et construire une telle base.
2. Soit $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ P_n(x_i) = f(x_i)$. Décomposer P_n dans la base des $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Un tel P_n est-il unique ?
3. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points donnés dans le tableau suivant :

x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x_i)$	-3/2	0	1/4	0	0

4. On veut établir la majoration d'erreur pour l'interpolation de Lagrange de f aux points x_i, *i.e.* montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi).$$
Pour cela :
   (a) Soit $x \in [a, b]$ fixé, distinct des $x_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$, posons
$$q(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \text{et} \quad \psi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{q(t)}{q(x)} \left(f(x) - P_n(x) \right).$$
   Montrer que ψ s'annule au moins $n + 2$ fois sur $[a, b]$.
   (b) Conclure.
5. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0, 1]$. Estimer le nombre maximum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieur à 0.1, 0.01, et 0.001.

Exercice 2. (Interpolation de Hermite)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et x_1, x_2 deux points distincts de $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un unique poylôme P de degré $\leqslant 3$ vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 1, 2$.

2. Trouver une base (h_1, h_2, H_1, H_2) de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que
$$P = f(x_1)h_1 + f(x_2)h_2 + f'(x_1)H_1 + f'(x_2)H_2$$
et exprimer cette base en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange L_1 et L_2.
3. Décrire les polynômes d'interpolation de Hermite dans le cadre général.

Exercice 3. (Intégration numérique : Formule des trapèzes)

1. Étant donnés a un réel et $h > 0$, déterminer les réels α et β pour que la formule d'intégration numérique suivante
$$\int_a^{a+h} f(x)dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h)$$
soit exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 1$.
2. Construire le polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ défini par $Q(a) = f(a)$ et $Q(a+h) = f(a+h)$. En approchant f par Q sur $[a, a+h]$, donner une approximation de $\int_a^{a+h} f(x)dx$.
3. Donner une estimation de l'erreur d'intégration d'une telle méthode.
4. Soit $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de l'intervalle $[c, d]$ uniforme de pas h. Utiliser la formule des trapèzes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour approcher $\int_c^d f(x)dx$. Donner une estimation de l'erreur d'intégration numérique ainsi obtenue.
5. Soit $\varepsilon = 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-8}$, trouver n pour que cette formule d'intégration numérique approche $\int_0^3 \sin(x)e^{-x^2}dx$ avec une précision ε.

Exercice 4. (Temps de descente d'une bille) On considère un tobbogan, dont la forme est donnée par la fonction suivante :
$$y : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0, \quad y'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [0,1]\,.$$
Une bille est lâchée du haut du tobbogan, sans vitesse initiale. On souhaite connaître le temps T_f qu'elle met pour arriver en bas du tobbogan.

On suppose que la bille a une masse m et on néglige les frottements. En effectuant un bilan d'énergie, on peut montrer que $T(f)$ est donné par
$$T(f) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y(0) - y(x))}}\, dx\,. \tag{1}$$
Pour le calcul de $T(f)$, on va faire appel à des méthodes numériques et les comparer pour différentes "formes" du toboggan. Pour cela, on considère une discrétisation uniforme de $[0,1]$ de pas Δ_x à $N+1$ points. On note la fonction à intégrer $f(x) := \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y(0)-y(x))}}$.

1. Proposer des formules pour calculer des approximations $T_N(f)$ de $T(f)$ par la méthode des rectangles à gauche, à droite et des trapèzes.

2. On va considérer les trois formes de toboggans suivantes :

$$y_1(x) := 1 - x\,, \quad y_2(x) = 1 - \sqrt{x}\,, \quad y_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{3/2}(5 - 3x)\,.$$

Quel problème apparaît ? On suppose désormais que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = x^{-\beta} + g(x)$ où g est une fonction régulière et $0 < \beta < 1$.

(a) Proposer une méthode de point milieu pour le calcul de $T_N(f)$. En découpant l'intégrale en deux morceaux : sur $[0, 1/N]$ et $[1/N, 1]$, montrer que $T(f) - T_N(f) = \mathcal{O}(N^{\beta-1})$.

(b) En opérant dans la formule qui définit $T(f)$ le changement de variable suivant : $x = u^\rho$ ($\rho > 0$), choisir ρ en fonction de β de sorte que la fonction à intégrer ne soit plus singulière en 0. Proposer alors la formule du point milieu pour calculer $T_N(f)$ sur la même discrétisation que précédemment. Donner une estimation de $T_N(f) - T(f)$.