Université Toulouse 3 Paul Sabatier 2018-2019
L2 Parcours Spécial

TP 1 - Calcul Scientifique

In [1]:

```
%pylab inline

# %pylab inline est un équivalent de l'importation* de numpy et de matplotlib.pyplo
#%matplotlib inline
#from matplotlib.pyplot import *
#from numpy import *
#from scipy import *
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

Exercice 1 - Interpolation

1) On considère les abscisses $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation aux points x, y (justifiez votre réponse) ?

- $p_1(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3\,x^2 + \frac{8}{3}x$
- $p_2(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}$
- $p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x$

2) Représentez sur une même figure les points d'interpolation, ainsi que les polynômes p_1 , p_2 et p_3 respectivement en noir, vert et rouge, sur l'intervalle $[-2.5, 2.5]$.

Exercice 2 - Calcul de polynômes d'interpolation

1) Calculez les polynômes d'interpolation aux points suivants :

a) $x = [-1, 2, 3]$ et $y = [4, 4, 8]$

d) $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [1, 0, 1]$

e) $x = [-3, -1, 2, 10]$ et $y = [-3, -1, 2, 10]$

2) Représentez graphiquement les polynômes des points a) et b), accompagnés des points d'interpolation correspondants.

Exercice 3 - Base de Lagrange

Soit $x_0, \ldots, x_n$ (n+1) réels distincts deux à deux. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note

$$L_k(x) = \prod_{j \in \{0,\ldots,n\}, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

le k-ième polynôme de Lagrange.

1) Montrez que L_k est un polynôme de degré n vérifiant $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ pour tout $k,\ i \in \{0, \ldots, n\}$.

2) En déduire que la famille de polynôme $\{L_k\}_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Écrire une fonction `PolLagrange(Xint,x,k)` qui calcule les valeurs prises par le k-ième polynôme de la base de Lagrange associé aux abscisses $X_{int} = (x_0, \ldots, x_n)$, en un point x.

4) Ecrire une fonction `ApproxLagrange(Xint,f,x)` qui renvoie la valeur en x du polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds $X_{int} = (x_0, \ldots, x_n)$.

Exercice 4 - Méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales

Soit une fonction continue $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$. On cherche à approcher l'intégrale $I(g) = \int_1^2 g(x)dx$ par la formule d'intégration numérique J_2 suivante:

$$J_2(g) = \lambda_0 g(1) + \lambda_1 g\left(\frac{3}{2}\right) + \lambda_2 g(2)$$

où les λ_i sont des réels.

1) Ecrire le système que doit vérifier $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ pour que la méthode soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

2) En déduire les valeurs de λ_0, λ_1 et λ_2.

3) Quel est le degré d'exactitude de la méthode ?

4) Déduire de cette étude une valeur approchée de $\ln(2)$. Que peut-on faire pour avoir une approximation aussi fine de que l'on souhaite ?

Exercice 5 - Méthode des rectangles en des trapèzes composite

1) Écrire une fonction `RectComp(a,b,f,h)`, qui retourne une approximation numérique de l'intégrale de la fonction `f` sur `[a,b]`, en utilisant la méthode d'intégration de rectangle à gauche composite sur une subdivision uniforme de pas `h`.

2) De même qu'à la question 1), écrire une fonction `TrapComp(a,b,f,h)`, qui retourne une approximation numérique de l'intégrale de la fonction `f` sur `[a,b]`, en utilisant la méthode d'intégration de trapèze à gauche composite sur une subdivision uniforme de pas `h`.

3) Utiliser ces fonctions pour calculer une approximation de l'intégrale de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, 2]$ par les méthodes composites des rectangles et trapèzes, avec `h` = 0.1, puis `h` = 0.01 et enfin `h` = 0.001. Quelle erreur obtient-on dans chaque cas ? Cela est-il en accord avec les résultats théorique vus en cours ?

In [11]:

```
A=arange(1,2,0.1)
print(A)
```

```
[ 1.   1.1  1.2  1.3  1.4  1.5  1.6  1.7  1.8  1.9]
```

Exercice 6 - Une nouvelle méthode d'intégration numérique

Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1], x_1 < x_2$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On définit, pour f une fonction continue sur $[-1, 1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

a) Montrer que T est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $[-1, 1]$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$.

b) Pour quelles valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, x_1$ et x_2, T est-elle exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ? Quel est alors le degré d'exactitude de la méthode ?

c) Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration de degré d'exactitude 3 sur un segment $[a, b]$ quelconque.

c) Programmer la méthode d'intégration obtenue, puis la méthode d'intégration composite correspondante. Vérifiez l'ordre de la méthode en traçant la courbe d'erreur quand on intègre $\cos$ sur $[0, 2]$.

In [ ]:

```

```