Université Toulouse 3 Paul Sabatier
L2 Parcours Spécial 2018-2019

TP 2 - Calcul Scientifique

In [ ]:

```
%pylab inline # %pylab inline est un équivalent de l'importation* de numpy et de mat

#%matplotlib inline
#from matplotlib.pyplot import *
#from numpy import *
#from scipy import *
```

Exercice 1 - Résolution d'équations

On souhaite comparer, pour la résolution de l'équation non linéaire suivante, une méthode de point fixe et la méthode de Newton:

$$f(x) = 0, \qquad \text{avec} \qquad f(x) = x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{2}.$$

1) Vérifier que cette équation admet une unique solution notée $\bar{x}$ dans $[0, 2\pi]$. 2) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite de réels définis par :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \phi(x_n), \\ x_0 &= \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \phi(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{2}.$$

Implémenter une fonction `pointfixe` qui

- prend en argument la donnée initiale α et une tolérance tol
- renvoie la première valeur de x_k telle que $|f(x_k)| < tol$ ainsi que le premier entier k pour lequel cette valeur est atteinte.

Tester cette méthode avec $\alpha = -5$. Combien faut-il d'itérations de la méthode pour les tolérances $10^{-3},\ 10^{-5}$ et 10^{-9} ?

3) Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \\ y_0 &= \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Implémenter une fonction `Newton` qui

- prend en argument la valeur initiale β et une tolérance tol
- renvoie la première valeur de y_k telle que $|y_{k+1} - y_k| < tol$ ainsi que le premier entier k pour lequel cette valeur est atteinte.

Tester cette méthode avec $\alpha = -5$. Combien faut-il d'itérations pour les tolérances $10^{-3},\ 10^{-5}$ et 10^{-9} ?

Exercice 2 - Résolution approchée d'Equations différentielles linéaires

L'évolution au cours du temps de la concentration de certaines réactions chimiques peut être décrite par l'équation suivante:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{1+t^2} y(t), \ t \geq 0 \\ y_0 = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

1) Calculer la solution exacte du problème

2) Ecrire les méthodes d'Euler explicite et implicite pour la résolution numérique de ce problème.

3) Implémenter deux fonctions `EulerE` et `EulerI` qui

- prennent en argument y0, N (le nombre de pas de temps) et T (le temps final de calcul)
- renvoient le vecteur des y_n^e et y_n^i pour $n = 0$ à N, obetnus par les méthodes d'Euler explicite et implicite respectivement. En prenant $y_0 = 5, T = 50$ et $N = 100$ calculer les vecteurs obtenus.

4) Tracer sur un même graphique des valeurs y_n^e, y_n^i et $y(t_n)$ calculés par les méthodes d'Euler explicite, implicite et la solution exacte. Recommencer pour $N = 1000$ puis $N = 10000$.

Exercice 3 - Equation logistique

On considère l'équation logistique utilisée pour modéliser la croissance de populations:

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha(1 - \frac{y(t)}{K}) y(t), \ t \geq 0 \\ y_0 = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où α et K sont des paramètres strictement positifs décrivant respectivement la vitesse de croissance de la population pour des petites populations et la population maximale que le milieu peut accueillir.

1) Vérifier que $y(t) = \frac{Ky_0}{y_0+(K-y_0)e^{-\alpha t}}$ est solution de ce problème.

2) En déduire que, dès que $y_0 \in]0, K[$, alors, pour tout $t > 0$, on a $y(t) \in]0; K[$ et $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

3) On considère un intervalle de temps $[0, T]$ sur lequel on cherche à approcher la solution. On définit une discrétisation à $N + 1$ points équidistants $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ de pas h.

On définit enfin la méthode de Heun pour la résolution approchée de $y'(t) = f(y(t))$ comme suit :

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(y_n) + f(y_n + hf(y_n))], \ \forall n = 0..N-1 \end{cases}$$

Ecrire les itérations des méthodes d'Euler explicite et de Heun pour l'équation logistique et implémenter une fonction `EulerE` et une fonction `Heun` qui

- prennent en argument $y_0, \ N, \ T$
- renvoient les vecteurs $(y_n^e)_{n=0..N}$ et $(y_n^H)_{n=0..N}$ obtenus par les méthodes d'Euler explicite et Heun respectivement.

4) Tracer sur un même graphe les solutions approchées par ces deux méthodes et la solution exacte pour $T = 5$ et $N = 500$. Tester le comportement obtenu en fonction du choix de y_0.

In [ ]:

```

```