Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR — **2018-2019**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TP3
Interpolation, Intégration numérique

Exercice 1. Implémenter une interpolation de Lagrange
Programmer une fonction **Lagrange** qui prend en argument

1. un vecteur X de réels distincts
2. un vecteur Y de réels
3. un réel (ou un vecteur de réels) t

et qui renvoie l'évaluation au(x) point(s) t du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds (X, Y). Pour cela on pourra au choix utiliser l'expression de ce polynôme :

1. dans la base canonique (en résolvant un système de Vandermonde)

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \quad \text{où} \quad \mathrm{Vander}(X) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

2. dans la base de Lagrange (en programmant une fonction **base_Lagrange(X,Y,i,t)** qui calcule en t le i-eme polynômes de la base de Lagrange associée aux noeuds (X, Y)

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i L_i(t), \quad \text{où} \quad L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - X_j}{X_i - X_j}.$$

3. sous la forme de Newton en programmant le calcul des différences divisées :

$$P(t) = Y[X_0] + \sum_{k=1}^{n} Y[X_0, \dots, X_k](t - X_0) \dots (t - X_k),$$

$$\text{où} \;\; Y[X_0, \dots X_k] = \frac{Y[X_1, \dots, X_k] - Y[X_0, \dots, X_{k-1}]}{X_k - X_0}, \; Y[X_0] = Y_0.$$

Exercice 2. (Phénomène de Runge !) En utilisant la fonction **Lagrange** implémentée à l'exercice précédent,

1. calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction sin définie sur $[0, 2\pi]$ associée à $n+1$ points équidistants de $[0, 2\pi]$, avec $x_0 = 0$ et $x_n = 2\pi$ pour $n = 3, 4, 5, 6$. Le tracer en superposant les résultats pour les différentes valeurs de n. Tracer sur le même graphique la fonction sin.

2. faire de même avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$. Qu'observez-vous quand n augmente ?
3. tracer enfin les polynômes d'interpolation obtenus en calculant le polyôme d'interpolation de Lagrange de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-5, 5]$ aux noeuds de Tchebychef, donnés par
$$\forall i = 0 \dots n,\ x_i = 5 \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right).$$

Exercice 3. (Intégration numérique.. Mise en oeuvre...) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il est question, connaissent la valeur prise par f en un nombre fini de points de l'intervalle $[a, b]$, de calculer une approximation de $I(f) = \int_a^b f(t)dt$. Pour cela on se donne une subdivison uniforme de $[a, b]$: $a = x_0, \dots, x_N = b$, on applique la relation de Chasles :
$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$$
et c'est l'intégrale sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ que l'on approche par une méthode d'intégration numérique.
On rappelle ici les méthodes d'intégration numérique suivantes, où on note J_i l'approximation choisie pour $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$:

Rectangles à gauche :	$J_i = hf(x_i)$
Point milieu :	$J_i = hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$
Trapèzes :	$J_i = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$

1. Définir la fonction $\phi : x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et calculer son intégrale exacte $I(f)$ sur $[0, 1]$.
2. Implémenter les fonctions **rectG**, **pointM**, **trap** qui prennent
   — en argument : la fonction g à intégrer, le nombre N d'intervalles dans la subdivision et les bornes a et b de l'intégrale à approcher.
   — en sortie : J la valeur approchée de l'intégrale selon la méthode choisie.
3. Comparer les méthodes sur l'exemple de la fonction ϕ. Pour cela, pour différentes valeurs $N = 50, 100, \dots, 450, 500$, on applique la méthode numérique à N intervalles, on calcule l'erreur E_N grâce à la valeur exacte calculée à la question 1, et on trace en échelle logarithmique les trois courbes de E_N en fonction de N. Qu'observez-vous ? En quoi cela illustre-t-il les théorèmes de convergences abordés en cours ?