Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR — **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TP4
Résolution d'équations non-linéaires
Introduction aux équations différentielles ordinaires.

Exercice 1. (Résolution comparée d'une équation par méthode de point fixe et de Newton)
On souhaite comparer, pour la résolution de l'équation non linéaire suivante, une méthode de point fixe et la méthode de Newton :

$$f(x) = 0, \qquad \text{avec} \qquad f(x) = x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{2}.$$

On a vu en TD que cette équation admet une unique solution dans $[0, 2 * \pi]$, notée $\bar{x}$.

1. (*Méthode de point fixe.*) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n), \\ x_0 = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \phi(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{2}.$$

   On a vu en TD que ϕ est contractante de rapport $1/5$ et que par conséquent la suite $(x_n)_n$ converge vers $\bar{x}$ avec

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{5^n}|x_0 - \overline{x}|.$$

   Implémenter une fonction **pointfixe** qui
   — prend en argument la donnée initiale α, et une tolérance *tol*
   — renvoie la première valeur de x_k tel que $f(x_k) < tol$ (*critère de résidu*) ainsi que l'entier k (pour lequel cette valeur est atteinte).
   Tester votre méthode avec $\alpha = -5$. Combien faut-il d'itérations de la méthode pour les tolérences $10^{-5},\ 10^{-9},\ 10^{-12}$?

2. (*Méthode de Newton.*) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \\ y_0 = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   On peut montrer que, pour α suffisamment proche de $\bar{x}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|y_{n+1} - \overline{x}| \leq \frac{1}{8}|y_n - \overline{x}|^2.$$

   Implémenter une fonction **Newton** qui

— prend en argument la donnée initiale α et la tolérance *tol*
— renvoie la première valeur de x_k tel que $f(x_k) < tol$ (*critère de résidu*) ainsi que l'entier k (pour lequel cette valeur est atteinte).

Que pensez-vous de l'utilisation du critère d'incrément $|x_{k+1} - x_k| < tol$ pour la méthode de Newton ? Tester votre méthode avec $\alpha = -5$. Combien faut-il d'itérations de la méthode pour les tolérences $10^{-5},\ 10^{-9},\ 10^{-12}$? Comparer aux résultats de la méthode de point fixe.

3. Reprendre vos fonctions précédentes et les modifier pour pouvoir obtenir en sortie la liste des valeurs prises par x_k et la liste des erreurs $|f(x_k)|$ pour k allant de 0 à un K donné en argument.
Tracer sur une même figure l'évolution en fonction de l'entier k de $log|f(x_k)|$ et $log|f(y_k)|$ avec $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ les suites obtenues respectivement par les fonctions **pointfixe** et **Newton** pour k allant de 0 à 12. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2. (Un peu de géométrie...) On cherche à déterminer les points d'intersection d'un cercle avec une hyperbole. Plus précisément on cherche les solutions du système d'équations polynomiales suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Pour plus de simplicité, on note par la suite

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer si il y en a la/les solution/s de ce problème.
2. Écrire l'itération de Newton pour la résolution de ce problème. On a montré en TD qu'une telle suite est bien définie dès que sa donnée initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est telle que $x_0 * y_0 \neq 0$ et qu'elle converge vers la solution calculée à la question précédente.
Implémenter
— une fonction **systeme** qui prend en argument $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et renvoie $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
— une fonction **Diffsysteme** qui prend en argument $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et renvoie $DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
— une fonction **Newton2D** qui prend en argument $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et une tolérance *tol* et renvoie $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ calculé par la méthode de Newton en 2D avec un critère d'incrément à la tolérance *tol* près.

Tester cette fonction pour différentes données initiales. Qu'obtient-on ? Qu'en pensez-vous (en comparaison avec les solutions exactes) ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (Pendule simple.... introduction aux EDOs)
En faisant un bilan de forces et en projetant l'équation obtenue par le principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation différentielle du second ordre en θ (angle du pendule par rapport à la verticale)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta. \tag{1}$$

Pour résoudre cette équation et obtenir l'évolution de θ en fonction du temps, on se donne $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \theta_1$ les valeurs initiales respectives de l'angle et de la vitesse angulaire.

Dans un premier temps, on suppose que l'angle par rapport à la vertical est petit et reste petit au cours du temps... on approche dans ce cas $\sin(\theta)$ par θ, ce qui conduit à l'équation $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$, (bien sur on va tout de suite décider que $\frac{g}{\ell} = 1$) ou, de manière équivalente, $\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ satisfait :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. Calculer une solution explicite de (2) en fonction de θ_0 et θ_1.
2. Appliquer un schéma d'Euler explicite et un schéma de Heun à l'équation (2) avec un pas de temps h donné, sur un intervalle $[0, T]$, tracer les fonctions obtenues en fonction du temps puis dans le plan de phase. On pourra prendre comme paramètres
$$\theta_0 = 0.01,\ \theta_1 = 0,\ h \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}.$$
On rappelle ici les méthodes d'Euler explicite et de Heun pour la résolution du problème autonome $y'(t) = f(y(t))$:
$$\text{Euler explicite :} \quad y_{n+1} = y_n + h * f(y_n)$$
$$\text{Heun :} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n) + f(y_n + h * f(y_n))\right).$$
3. Comparer les résultats obtenus avec la solution explicite de la question 1 (en les traçant sur un même graphe par exemple).
4. Un bilan d'énergie simple sur le pendule permet de voir que $x(t)^2 + y(t)^2$ est constant au cours du temps si $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont solutions de (2). Qu'en est-il des solutions approchées ?