Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L2 Maths — **2018-2019**
U.E. Méthodes Numériques

Contrôle Continu, Méthodes Numériques

Durée : 1 heure 30 - Calculatrices, portables et tout document interdits

La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. QCM et questions de cours(4 points)
Sélectionner parmi les réponses proposées la (ou les) bonne(s) réponse(s) aux questions suivantes.

1. Lequel de ces polynômes appartient à la base de Lagrange associée aux points $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ et $x_3 = 2$?
   a. $(-X^3 + X^2 + 2X)/2$
   b. $X^3 - X$
   c. $(-X^3 + X)/2$
   d. $-X^3 + 2X$
   e. $(X^3 - 2X)/2$
   Correction : réponse a
2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne trois réels x_0, x_1 et x_2 distincts deux à deux, et on note p_1 (resp. p_2) le polynôme d'interpolation de Lagrange à f_1 (resp. f_2) en x_0, x_1 et x_2. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont **toujours** vraies ?
   a. $p_1\,p_2$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $f_1\,f_2$ aux points x_0, x_1, x_2
   b. $\mathsf{deg}(p_2) = 2$
   c. $p_2 - p_1$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $f_2 - f_1$ aux points x_0, x_1, x_2
   d. $f_2(x_k) = x_k^3$ pour $k \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow p_2(x) = x^3$
   e. $f_1(x_k) = 1$ pour $k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow p_1 = 1$
   f. $(p_1)^2$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange à $(f_1)^2$ aux points x_0, x_1, x_2
   Correction : réponse c et e
3. On considère les abscisses $x = [-2, 0, 1, 2]$ et les valeurs $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, le(s)quel(s) est (sont ?) le(s) polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x, y ?
   a. $p_1(X) = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3X^2 + \frac{8}{3}X$
   b. $p_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$
   c. $p_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X.$
   Correction : réponse c
4. Étant donnés $d+1$ réels distincts $x_0, \ldots, x_d$ et $(L_0, \ldots, L_d)$ la base de Lagrange associée, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{d} L_k(x) = d + 1$.
   Correction : Faux

5. Étant donné un intervalle $[a,b]$, un entier $d \geqslant 0$ et $d+1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_d \in [a,b]$, énoncer le théorème d'approximation d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^{d+1}([a,b])$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_d$.
   Correction : Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{d+1}$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que
$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{(d+1)!} \prod_{k=0}^{d} (x - x_k).$$

Exercice 2. (Questions de cours et d'application directe)(4 points)
On considère des réels deux à deux distincts $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$.

1. Expliciter la famille des polynômes de Lagrange associée aux points $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ et montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Même question avec la base de Newton.
3. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x = [-3, 1, -1, 2]$ et $y = [2, 5, -1, 0]$ dans la base de Newton.

Correction :

1. voir cours
2. Famille de Newton : $(1, X - x_0, (X - x_0)(X - x_1), (X - x_0)(X - x_1)(X - x_2))$.
   Pour montrer que c'est une base, comme le cardinal de la famille est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X] = 4$ il suffit de montrer que la famille est libre. On accepte l'argument des degrés tous différents (vu en algèbre linéaire) ou alors on suppose qu'il existe une combinaison nulle, puis on identifie tous les coefficients de la combinaison en évaluant en $X = x_0 \ldots x_3$.
3. Les calculs ne sont pas très jolis mais ils donnent le polynôme $P(X) = 2 + \frac{3}{4}(X+3) + \frac{9}{8}(X+3)(X-1) - \frac{91}{120}(X+3)(X-1)(X+1)$.
   Si les polynômes de la base sont faux c'est 0, si il y a une erreur de calcul dans les coeffs mais que la formule des différences divisées semble connue, on met 0.5. Si tout est correct sauf la dernière différence divisée, on met 1. Si l'étudiant a calculé le polynôme dans la base de Lagrange, c'est Hors sujet donc on ne met que 0.25 si tout est correct.

Exercice 3. (Un vrai polynôme à calculer)
Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X = [-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$, et $Y = [-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0]$.
Correction : $P(X) = (X - \frac{1}{2})(X - 1)(X + \frac{1}{2})$.

Exercice 4. (Et si... on impose une dérivée ?)
Étant donnés trois réels y_0, y_1 et z_1, on s'intéresse au problème d'interpolation suivant :

Trouver un polynôme P de degré minimal tel que $P(0) = y_0,\ P(1) = y_1,\ P'(1) = z_1$.

Pour cela, on va procéder en plusieurs étapes.

1. Montrer qu'il existe un unique tel polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 et exprimer ses coefficients en fonction de y_0, y_1 et z_1.
   On cherche P sous forme indéterminée et on résoud le système qui donne
$$P(X) = y_0 + (2y_1 - 2y_0 - z_1)X + (y_0 - y_1 + z_1)X^2.$$

2. Dans l'idée d'avoir éventuellement beaucoup plus de points, on cherche une base de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée au problème.
   a. Déterminer trois polynômes notés respectivement H_0, H_1 h_1 tels que

$$\begin{cases} H_0(0) = 1, \ H_0(1) = H_0'(1) = 0, \\ H_1(0) = H_1'(1) = 0, \ H_1(1) = 1, \\ h_1(0) = h_1(1) = 0, \ h_1'(1) = 1. \end{cases}$$

   Correction Ici on peut chercher les polynômes grâce aux racines, ou sinon grâce à la question précédente et on trouve

$$H_0(X) = (X-1)^2, \ H_1(X) = X(2-X), \ h_1(X) = X(X-1).$$

   b. Montrer que la famille (H_0, H_1, h_1) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Correction Comme plus haut, on a le bon nombre d'éléments donc il suffit de montrer que la famille est libre. Pour cela on suppose trouvés α_0, α_1 et β tels que $\alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \beta h_1 = 0$.
   On évalue en $X = 0$ ce qui donne $\alpha_0 = 0$ puis en $X = 1$ ce qui donne $\alpha_1 = 0$ puis on dérive la formule et on évalue en $X = 1$ pour obtenir β nul.
   c. Exprimer P dans la base (H_0, H_1, h_1).
   Correction Comme (H_0, H_1, h_1) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et que l'on cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique triplet de réels (a_0, a_1, a_2) tel que $P(X) = a_0 H_0(X) + a_1 H_1(X) + a_2 h_1(X)$.
   Pour trouver les coefficients $a_0, \ a_1$ et a_2 il suffit d'écrire les valeurs de P en 0 puis 1 et enfin de P' en 1 et d'utiliser les propriétés de $H_0, \ H_1$ et h_1. On obtient ainsi : $P(X) = y_0 H_0(X) + y_1 H_1(X) + z_1 h_1(X)$.

Exercice 5. (Approximation et polynôme d'interpolation de Lagrange.)
On considère $a = x_0, \ x_1, \ldots, x_d = b$, deux à deux distincts et le polynôme P_d d'interpolation de Lagrange de la fonction exponentielle. Montrer que :

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_d(x)| \underset{d \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Correction Il n'y a pas besoin ici de savoir quoi que ce soit sur la convergence uniforme. L'application du théorème d'approximation donne

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{e^b}{(d+1)!} \prod_{k=0}^{d} |x - x_k|$$

car $|f^{(d+1)}(\xi)| = |e^{\xi}| \leqslant |e^b|$. De plus $\prod_{k=0}^d |x - x_k| \leqslant (b-a)^{d+1}$. Enfin, par convergence comparée des suites réelles, on sait que $\frac{(b-a)^{d+1}}{(d+1)!} \to 0$ quand d tend vers l'infini. Il n'y a rien de plus à dire.