Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques – L2 Maths — **2017-2018**
U.E. Méthodes Numériques

Correction de l'examen terminal de Méthodes numériques

Exercice 1. (Questions de cours et d'application directe)[3 points]

1. (2 pts) *Compléter le tableau de différences divisées suivant et donner le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant dans les bases de Newton puis le recalculer d'une autre façon.*
   barème : 1 point pour le tableau (pas de demi points), 0.5 par polynôme correct

x_i	$f(x_i)$				
-1	$-\frac{3}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	0	3			
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	
1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0

   Le polynôme correspondant dans la base de Newton est
   $$P(X) = -\frac{3}{2} + 3(X+1) - \frac{5}{2}(X+1)(X+\frac{1}{2}) + X(X+1)(X+\frac{1}{2}).$$
   En remarquant que ce polynôme admet $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ et 1 comme racines, on peut le chercher sous sa forme factorisée : $P(X) = (X-1)(X^2-\frac{1}{4})(\alpha X+\beta)$. On trouve finalement $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ soit $P(X) = (X-1)(X^2-\frac{1}{4})$.

2. (1pt) *Donner la méthode d'intégration numérique de Simpson sur l'intervalle [a,b] ainsi que son degré d'exactitude (aussi appelé son ordre).*
   barème : 0.5 pour la méthode, 0.5 pour le degré.
   Méthode de Simpson sur $[a,b]$: $J(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\Big)$. Elle est de degré d'exactitude 3.

Exercice 2. (Interpolation de Lagrange 1)[3 points]

1. (2 pts) *Construire, pour α et β deux réels donnés, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $(-1,\alpha), (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$. Quel est le degré de P dans le cas où $\alpha = \beta$?*

barème : 1 pt pour le polynôme, 1 pour le degré.
On obtient $P(X) = \alpha X^2 - \beta(X^2 - 1)$. Il est donc de degré 0 si $\alpha = \beta$.

2. (1 pt) *Montrer que P est pair. Peut-il être de degré 1 ?*
P est clairement pair, et de degré 2 si $\alpha \neq \beta$. Il ne peut pas être de degré 1.

Exercice 3. (Interpolation de Lagrange 2)[6 points]
Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$.

1. (1 pt) *Calculer le polynôme d'interpolation P_ε de Lagrange de f associé aux noeuds $0, \varepsilon$ et 1.*
barème : 1 point si juste, 0.5 si un faute de calcul, 0 sinon
On obtient $P_\varepsilon(X) = f(0)\frac{(X-1)(X-\varepsilon)}{\varepsilon} + f(1)\frac{X(X-\varepsilon)}{1-\varepsilon} + f(\varepsilon)\frac{X(X-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)}$. Sous forme développée : $P_\varepsilon(X) = \frac{1}{1-\varepsilon}\left(-\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} + f(1) - f(0)\right)X^2 + \left(\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} + \varepsilon(f(0) - f(1))\right)X + (1-\varepsilon)f(0)$.
2. (1 pt) *Donner, à l'aide d'un résultat du cours, une estimation de l'erreur d'approximation $|f(x) - P_\varepsilon(x)|$ pour $x \in [0,1]$.*
Le théorème d'approximation du cours donne :
$$\forall x \in [0,1],\ \exists \alpha_x \in]0,1[,\ f(x) - P_\varepsilon(x) = \frac{f^{(3)}(\alpha_x)}{3} x(x-\varepsilon)(x-1),$$
d'où :
$$\forall x \in [0,1],\ |f(x) - P_\varepsilon(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \frac{|f^3(t)|}{3},$$
3. (1 pt) *En écrivant P_ε sous sa forme développée, montrer que pour tout $x \in [0,1]$ fixé,*
$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(x) = f(0) + xf'(0) + (f(1) - f(0) - f'(0))x^2 \text{ (noté } Q(x)).$$
On reprend la forme développée de P_ε et on se débarrasse des taux d'accroissement en les faisant tendre vers leurs dérivées, les autre termes sont simples à gérer.
4. (a) (1 pt) *Montrer que si R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $R(0) = R(1) = R'(0) = 0$, alors R est le polynôme nul.*
Un tel polynôme admet 0 comme racine double et 1 comme racine simple. Comme il est de degré inférieur ou égal à 2, c'est nécessairement le polynôme nul (sinon il serait au moins de degré 3).
(b) (1 pt) *En déduire que Q est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que :*
$$Q(0) = P(0),\ Q(1) = P(1), \quad \text{et } Q'(0) = P'(0).$$
(Pour l'unicité, on pourra montrer que si deux tels polynômes existent...)
barème : on met 0.5 pour la vérification des valeurs et 0.5 pour l'unicité
Le polynôme Q prend effectivement ces valeurs. Supposons maintenant trouveés deux tels polynômes Q_1 et Q_2, alors le polynôme $Q_1 - Q_2$ s'annule en

0, et en 1 et sa dérivée s'annule en 0 et il est de degré inférieur ou égal à 2. D'après la question précédente, c'set le polynôme nul, donc $Q_1 = Q_2$, ce qui montre l'unicité.

5. (1 pt) *En remarquant que pour tout $x \in [0,1]$,*

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant |Q(x) - P_\varepsilon(x)| + |P_\varepsilon(x) - f(x)|,$$

montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{6} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(3)}(t)| + 3\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |f^{(2)}(t)|.$$

D'après la remarque (qui est juste un inégalité triangulaire) et l'inégalité obtenue à la question 2., il suffit de majorer pour tout $x \in [0,1]$ $|P_\varepsilon(x) - Q(x)|$. Or,

$$|P_\varepsilon(x) - Q(x)| = \varepsilon f(0) + \left(f'(0) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varepsilon) - f(0)) - \varepsilon(f(0) - f(1))\right) x \\ - \left(f'(0) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varepsilon) - f(0))\right) x^2.$$

Un développement limité permet de conclure pour les parties en $f'(0) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varepsilon) - f(0))$ et donne le terme $\varepsilon \sup\limits_{t\in[0,1]} |f^{(2)}(t)|$.

Exercice 4. (Calcul approché d'intégrales 1)[4 points]

On définit la fonction $h(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$

1. (1 pt) *Calculer $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ où $0 \leqslant x < 1$ et donner la valeur de $H(\frac{2}{3})$.*
   On obtient $H(x) = -\ln(1-x)$ et donc $H(\frac{2}{3}) = \ln 3$.
2. (2 pts) *Calculer les coefficients c_0, c_1 et c_2 pour que la méthode d'intégration numérique suivante soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2*

$$J(f) = c_0 f(0) + c_1 f(\frac{1}{3}) + c_2 f(\frac{2}{3}).$$

On demande ici aux étudiants de Retrouver ces coefficients par le calcul. On obtient en testant sur la base canonique les coefficients suivants :

$$J(f) = \frac{1}{9} f(0) + \frac{4}{9} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{9} f(\frac{2}{3}).$$

3. (1 pt) *En utilisant la méthode numérique précédente, calculer une valeur approchée de $\ln(3)$.*
   D'après la question (1), on a vu que $\ln(3) = H(\frac{2}{3}) = \int_0^{2/3} h(t)dt$. Ainsi, en utilisant la méthode numérique obtenue à la question pércédente on a :

$$\ln(3) \simeq \frac{1}{9} h(0) + \frac{4}{9} h(\frac{1}{3}) + \frac{1}{9} h(\frac{2}{3}) = \frac{10}{9}.$$

Exercice 5. (Calcul approché d'intégrales 2)[7 points]

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On fixe $\omega \in]0,1]$ et on considère la méthode d'intégration numérique sur $[-1,1]$ donnée par :

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \simeq \frac{4}{3}g(-\frac{\omega}{2}) + \frac{2}{3}g(\omega).$$

1. (1 pt) *Montrer que la méthode numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quelque soit ω.*
   C'est à vérifier par exemple sur la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. (1pt) *Déterminer ω pour que la méthode d'intégration numérique soit exacte pour les polynômes de plus haut degré possible. Quel est alors son degré d'exactitude (aussi appelé ordre de la méthode) ?*
   En testant pour $P = X^2$ on obtient que nécessairement $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En testant pour $P = X^3$ on obtient $J(X^3) = \frac{\omega^3}{3} \neq 0 = \int_{-1}^{1} X^3 dX$. La méthode est donc de degré d'exactitude 2.
3. (2 pts) *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une subdivision uniforme $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $x_i = a + h * i$. Proposer par changement de variable une méthode numérique de même degré d'exactitude pour approcher $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx$, i étant fixé, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.*
   Le changement de variable $x = x_i + \frac{h}{2}(1+s)$ fournit la méthode suivante sur $[x_i, x_{i+1}]$:
   $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx \simeq \frac{2h}{3} g\left(x_i + \frac{h}{2}(1-\frac{\omega}{2})\right) + \frac{h}{3} g\left(x_i + \frac{h}{2}(1+\omega)\right).$$
4. (1 pt) *En déduire une formule composite pour le calcul de $\int_a^b g(x)dx$. Pour alléger les notations, on propose de noter, pour tout $i = 0 \dots n$, $\alpha_i = x_i + \frac{h}{2}(1-\frac{\omega}{2})$ et $\beta_i = x_i + \frac{h}{2}(1+\omega)$.*
   On obtient la formule composite en utilisant la relation de Chasles pour découper l'intégrale sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:
   $$J_{comp}(g) = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1} 2g(\alpha_i) + g(\beta_i)$$
5. (2 pts) *Quelle estimation en fonction de h peut on obtenir pour l'erreur d'approximation de cette méthode composite sur $[a,b]$? Pour cela, on calculera l'erreur de la méthode composite à partir de l'erreur de la méthode "élémentaire" sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (on pourra pour cette erreur élémentaire utiliser un résultat du cours).*
   barème : 1 point pour la formule de l'erreur élémentaire, 1 pt pour l'erreur composite.
   D'après le théorème du cours l'erreur élémentaire E_i sur $[x_i, x_{i+1}]$ est donnée par :
   $$E_i \leqslant C \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |g^{(3)}(t)| h^4.$$

En sommant les erreurs sur i, on obtient l'erreur composite :

$$E_{comp} \leqslant C \sup_{t\in[a,b]} |g^{(3)}(t)| * nh^4 = \tilde{C} \sup_{t\in[a,b]} |g^{(3)}(t)| * h^3$$