

---

## Notes de cours, UE Méthodes numériques, L2 Maths

---

### Quelques mots avant de commencer

Il est rare en général, quand on se pose un problème mathématiquement intéressant, d'avoir une formule explicites des solutions. C'est là que les méthodes numériques prennent leur sens : elles permettent d'approcher la solution d'un problème avec un algorithme que l'on peut par la suite implémenter sur un ordinateur. Au cours de cette UE de S3, nous allons donc travailler sur des **Méthodes numériques pour l'approximation de solutions** de problèmes mathématiques dont il est difficile de connaître **explicitement** les solutions (c'est-à-dire qu'il est difficile d'avoir une formule pour la solution).

Le travail se divise donc en général en plusieurs parties :

- Montrer que le problème que l'on se pose admet une unique solution (sinon cela n'a aucun sens d'essayer de l'approcher).
- Construire une méthode numérique
- Avoir une idée de l'erreur commise lorsque l'on approche la vraie solution (que l'on ne connaît pas) par le résultat donné par la méthode numérique. Idéalement, on a envie de montrer que cette erreur est petite, et même d'en avoir une estimation en fonction des paramètres de la méthode numérique
- Implémenter cette méthode numérique.

On va donc s'attacher pendant ce semestre à suivre cette méthodologie autour de 2 problèmes classiques qui feront l'objet des 2 chapitres de cette UE :

- L'interpolation de Lagrange : approximation de fonctions
- Le calcul approché d'intégrales (intégration numérique ou méthodes de quadrature).

Cette UE sera organisée autour de 6 cours magistraux en amphi, 6 TDs et 3 Tps. Elle donnera lieu à un contrôle continu (40% de la note finale et qui inclut une note de participation aux TP sur 5 points), et un contrôle terminal (60% de la note finale). Les documents de cours, de TD et de Tps seront mis en ligne dès le début de l'année sur l'espace Moodle prévu pour cette UE ainsi que sur ma page professionnelle :

<https://perso.math.univ-toulouse.fr/fdelebec/teaching/>

Des corrigés rédigés pour les Tds et les Tps seront mis en ligne au fur et à mesure de l'année.

# 1 Interpolation polynomiale de Lagrange

Comme annoncé, dans ce chapitre on va parler d'interpolation. Le problème que l'on se pose peut être de deux formes, qui finalement se rejoignent :

- On se donne  $N$  points d'abscisses  $x_i$  et d'ordonnées  $y_i$  pour  $i = 1 \dots N$  et on veut tracer une courbe simple qui passe par ces points, autrement dit on cherche une fonction  $P$  simple telle que, pour tout  $i = 1 \dots N$ ,  $P(x_i) = y_i$ .
- Le même problème écrit différemment : on cherche à approcher par une fonction simple une fonction  $f$  que l'on ne connaît qu'en certains points (par exemple la trajectoire d'un objet dont on ne connaît les positions qu'à certains temps).

Chercher une fonction *simple* ne veut rien dire en soi si on ne décide pas du type de fonction que l'on s'autorise. Ici, on ne travaillera que sur *l'interpolation polynomiale*, c'est-à-dire qu'on ne s'autorisera l'approximation que par des polynômes.

Pourquoi des polynômes ? Pour 3 raisons principales :

- C'est facile à manipuler : multiplier, dériver, les formules sont relativement connues et simples, et puis ce sont des fonction régulières (ce qui fait des courbes lisses)
- On peut facilement évaluer un polynôme en un point sans vraiment calculer les puissances grâce à l'algorithme bien connu de Hörner :

$$\sum_{j=0}^d a_j x^j = (\dots ((a_d x + a_{d-1}) x + a_{d-2}) x + \dots + a_1) x + a_0.$$

- Il est effectivement possible d'approcher une fonction continue sur un segment par un polynôme, aussi proche que l'on veut, grâce au théorème d'approximation de Weierstrass :

**Théorème :** Soit une fonction continue  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $P$  tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

On sait donc grâce à ce théorème que ce que l'on veut faire est possible, néanmoins, la preuve de ce théorème ne permet pas de construire un tel polynôme simplement. On sait juste qu'il existe... Pire, plus  $\varepsilon$  est petit (c'est-à-dire plus on veut améliorer l'approximation), plus le degré de  $P$  augmente... (et donc le nombre de calculs et la difficulté de manipulation de  $P$ ).

Trève de bavardage, passons aux choses sérieuses :

## Cadre théorique précis :

On se donne dans tout ce chapitre  $d + 1$  réels deux à deux distincts  $x_0, \dots, x_d$  et  $d + 1$  réels quelconques  $y_0, \dots, y_d$ . Le problème que l'on se pose est :

Trouver un polynôme  $P$  de degré le plus petit possible tel que

$$\forall i = 0 \dots d, \quad P(x_i) = y_i.$$

Graphiquement, cela revient "bêtement" à trouver un polynôme dont le graphe passe par les points de coordonnées  $(x_i, y_i)$ . Il est donc important que les  $x_i$  soient deux à deux distincts : si on impose que le polynôme prenne deux valeurs différentes au même point, on n'est pas prêt de trouver... On peut effectivement voir sur la Figure 1 que graphiquement, on cherche des polynômes dont la courbe représentative passe par les points dont on a fixé les coordonnées (ici, on les a mis en avant avec des pastilles bleues) ; Ici, on voit que le polynôme représenté en vert ne prend pas la bonne valeur en 0 (son graphe ne croise pas la pastille  $(0,0)$ ). On voit aussi que les deux autres conviennent, mais que le degré du polynôme en noir est plus élevé que celui en rouge.

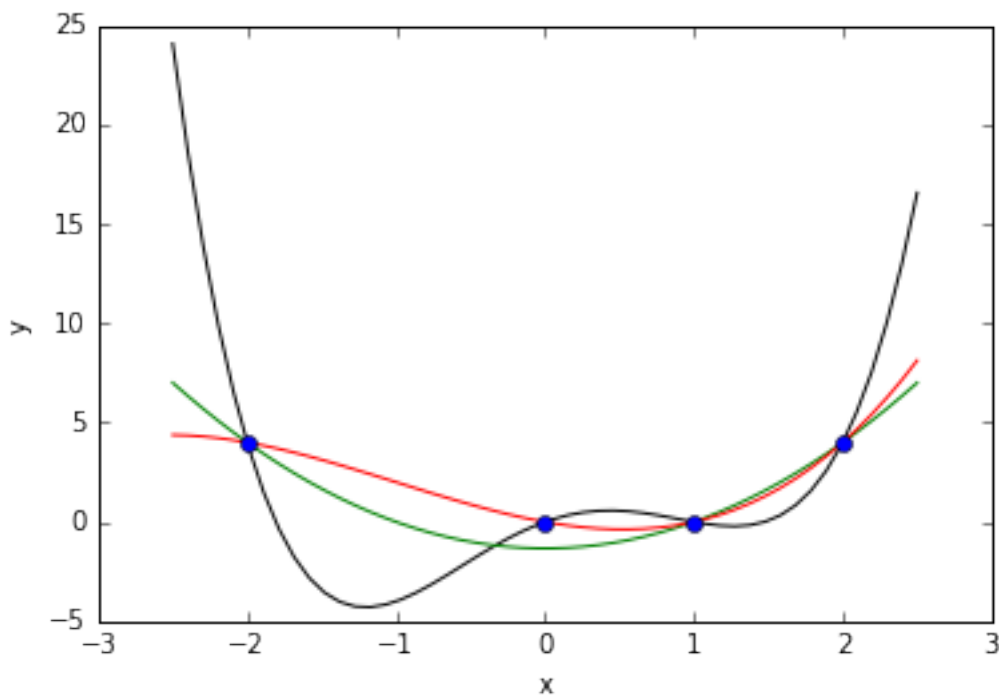


FIGURE 1 – Problème d'interpolation aux points  $x = [-2, 0, 1, 2]$ ,  $y = [4, 0, 0, 4]$

## 1.1 Exemples, Intuition sur le lien entre nombre de points et degré du polynôme

### Cas de 2 points : $d=1$

On considère deux points  $A_0(x_0, y_0)$  et  $A_1(x_1, y_1)$  avec  $x_0 \neq x_1$ . Graphiquement, la question est simple : on cherche à relier les deux points  $A_0$  et  $A_1$  par une courbe la plus simple possible. Évidemment, il s'agit de la droite  $(A_0A_1)$ . Deux cas apparaissent alors en fonction de  $y_0$  et  $y_1$  :

- si  $y_0 = y_1$  la droite est horizontale, d'équation  $y = y_0$

— si  $y_0 \neq y_1$ , il s'agit de la droite oblique d'équation  $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$ .  
 Le polynôme que l'on cherche est donc constant (de degré 0)  $P_1 = y_0$  dans le premier cas, et de degré 1,  $P_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(X - x_0) + y_0$  dans le deuxième cas.

On aurait aussi bien pu se dire "tiens, je vais chercher un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui convient... Je cherche donc  $P$  sous la forme  $P_1(X) = a_0 + a_1X$ . Je cherche donc  $a_0$  et  $a_1$ , et alors les conditions  $P_1(x_0) = y_0$  et  $P_1(x_1) = y_1$  s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 + x_0 a_1 = y_0 \\ a_0 + x_1 a_1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ a_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 \end{cases}$$

**Remarque :** Un tel polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) est unique... mais si on s'autorise les polynômes de degré plus grand, on peut en construire une infinité. En effet, n'importe quel polynôme obtenu en ajoutant à  $P_1$  un multiple de  $(X - x_0)(X - x_1)$  prend les bonnes valeurs en  $x_0$  et en  $x_1$ ...

### Cas de 3 points : d=2

On se donne à présent 3 réels deux à deux distincts  $x_0, x_1, x_2$  et 3 réels quelconques  $y_0, y_1, y_2$ , et on cherche un polynôme  $P_2$  qui interpole les points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Graphiquement, cela revient toujours à trouver un polynôme dont le graphe passe par les 3 points  $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ . Vous me voyez maintenant venir... Ces points peuvent exceptionnellement être alignés (auquel cas on aura de nouveau une droite), sinon, ce sera un genre de parabole... On s'attend donc à ce que  $P_2$  soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

On va donc chercher  $P_2$  sous la forme indéterminée

$$P_2(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2.$$

Les conditions  $P(x_i) = y_i$  pour  $i = 0, 1, 2$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 = y_0 \\ a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 = y_1 \\ a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pour trouver  $P_2$  (c'est à dire dans le calcul précédent trouver  $a_0, a_1$  et  $a_2$  en fonction de  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  qui sont connus), on est donc ramenés à la résolution d'un système linéaire dont le vecteur  $(a_0, a_1, a_2)^T$  est l'inconnue et de matrice

$$V(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice de Vandermonde associée aux points  $x_0, x_1, x_2$ . Or, c'est un exercice classique de montrer que si  $x_0, x_1$  et  $x_2$  sont 2 à 2 disjoints cette matrice est inversible... (vous avez vu / allez voir ça un jour en Algèbre linéaire). Il existe dès lors une unique solution au système (1) et donc un unique polynôme  $P_2$  qui convient.

On comprend maintenant qu'il doit y avoir un lien entre le degré du polynôme (c'est à dire son nombre de coefficients) et le nombre de points d'interpolation : le nombre de points d'interpolation  $d+1$  fixe le nombre d'équations du système (1) et donc, pour avoir une unique solution au système, on comprend que l'on doit chercher un degré inférieur ou égal à  $d$  (c'est à dire  $d+1$  coefficients).

Si on diminue le degré, on risque de ne pas trouver de tel polynôme, si on l'augmente, on perdra l'unicité (voir exercice 2 feuille de TD1)

## 1.2 Résultat d'existence et d'unicité.

**Théorème 1.** Soient  $x_0, x_1, \dots, x_d$   $d+1$  réels deux à deux distincts. Quels que soient les  $d+1$  réels  $y_0, \dots, y_d$ , il existe un unique polynôme  $P_d$  de degré inférieur ou égal à  $d$  (on notera par la suite  $\mathbb{R}_d[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$  à coefficients réels) tel que :

$$\forall i = 0, \dots, d, \quad P_d(x_i) = y_i.$$

On l'appelle *Polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points (parfois aussi appelés noeuds) d'interpolation  $x_0, \dots, x_d$* .

**Preuve :** Pour cette preuve, on va proposer plusieurs méthodes : une preuve "algébrique", plus théorique que l'autre, et qui n'est pas constructive (elle permet de montrer l'existence et l'unicité de  $P_d$  mais ne donne pas de méthode pour le calculer). La deuxième preuve se fait, comme dans les exemples que l'on a traités, en résolvant un système linéaire de type "Vandermonde".

Méthode 1 : On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_d[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_d)). \end{aligned}$$

Alors,  $\Phi$  est clairement une application linéaire d'un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension  $d+1$  (on rappelle que  $\mathbb{R}_d[X]$  est un espace vectoriel de dimension  $d+1$ , un exemple de base étant la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^d)$ ) dans un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension  $d+1$  :  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Montrer qu'elle est bijective équivaut donc (du fait de l'égalité entre les dimension des espaces de départ et d'arrivée) à montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ .

Pour montrer que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ , prenons  $Q$  dans  $\text{Ker}(\Phi)$  (c'est-à-dire  $Q \in \mathbb{R}_d[X]$  et  $\Phi(Q) = (0, \dots, 0)$ ) et montrons que  $Q$  est le polynôme nul.

On sait que  $Q(x_0) = Q(x_1) = \dots = Q(x_d) = 0$ , donc  $Q$  admet  $x_0, x_1, \dots, x_d$  comme racines *distinctes*. Or, il est de degré inférieur ou égal à  $d$ , il a donc au maximum  $d$  racines. C'est donc le polynôme nul. L'application  $\Phi$  est donc injective, donc bijective, donc, pour tout  $(y_0, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  tel que  $\Phi(P) = (y_0, \dots, y_d)$ , c'est-à-dire que

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_d) = y_d.$$

CQFD.

Méthode 2 : Par les systèmes.

On reprend ici l'idée des méthodes utilisées en exemple : on cherche un tel polynôme  $P$  sous forme indéterminée :  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$  ; Il reste à prouver qu'il existe un unique  $(a_0, a_1, \dots, a_d)$  qui convient. Pour cela, on écrit les  $d + 1$  équations  $P(x_i) = y_i$  pour  $i = 0 \dots d$  :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_dx_0^d = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_dx_1^d = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_d + a_2x_d^2 + \dots + a_dx_d^d = y_d \end{cases}$$

qui se ré-écrit sous forme matricielle équivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^d \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \dots & x_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La matrice du système (2) est appelée *matrice de Vandermonde associée* à  $x_0, \dots, x_d$ , et notée  $V(x_0, \dots, x_d)$ . Il est classique que

$$\det(V(x_0, \dots, x_d)) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

car les  $x_0, \dots, x_d$  sont 2 à 2 *distincts* par hypothèse. La matrice  $V(x_0, \dots, x_d)$  est donc inversible et donc le système (2) admet une unique solution. CQFD.

**Remarque 1.** On a grâce à la Méthode 2 une méthode pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange : pour trouver ses coefficients, il suffit d'inverser la matrice de Vandermonde et résoudre le système (2)...

Si on était en amphi, je vous dirais "Bon, ben pour la semaine prochaine, je vais vous donner 10 points  $x_0, \dots, x_9$ , 10 valeurs  $y_0, \dots, y_9$  et zou, vous me calculez les coefficients..." Bien sûr, personne n'a envie de faire ça... Inverser cette matrice de Vandermonde, c'est long et pénible et couteux... d'autant plus que le nombre de points est grand... Or, pour avoir une bonne approximation, on imagine bien que l'on a besoin de pas mal de points. . .

En fait, dans la méthode 2, le point clef est que l'on a cherché  $P$  "au hasard" dans la base canonique de  $\mathbb{R}_d[X]$  :  $(1, X, \dots, X^d)$ ... Oui, c'est ce que l'on fait quand on cherche  $P$  sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d.$$

Les coefficients  $a_0, \dots, a_d$  sont les coefficients de  $P$  dans la base canonique !

On va voir dans la section prochaine que l'on peut construire une base de  $\mathbb{R}_d[X]$  dans laquelle il sera plus simple de chercher  $P$ .

**Définition 1.** (Polynôme d'interpolation d'une fonction) Étant donné un intervalle  $[a, b]$  donné, une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  et  $d + 1$  réels de  $[a, b]$  notés  $x_0, \dots, x_d$  deux à deux distincts, on appelle *polynôme d'interpolation de  $f$  associé aux points d'interpolation*  $x_0, \dots, x_d$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, \dots, d$

Cette définition revient donc à choisir pour les réels  $y_i$  les valeurs d'une fonction  $f$  donné aux points  $x_i$ .

**Question subsidiaire :** Considérons un polynôme  $Q$  et  $d + 1$  réels  $x_0, \dots, x_d$  deux à deux distincts, quel est le polynôme d'interpolation de  $Q$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$ ? (voir exercice 4 feuille de TD 1).

### 1.3 Polynôme de Lagrange sous forme de Lagrange et de Newton

#### 1.3.1 Base et forme de Lagrange

**Définition 2.** Polynômes de la base de Lagrange

On considère  $d + 1$  réels deux à deux distincts  $x_0, x_1, \dots, x_d$ . On définit le  $i$ -ème polynôme de la base de Lagrange par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

En général, vous n'aimez pas trop cette formule... Prenons donc un exemple à 3 points  $(x_0, x_1, x_2)$  deux à deux distincts. Il y a alors 3 polynômes à calculer :  $L_0, L_1$  et  $L_2$ . Allons-y en utilisant la définition :

$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
$L_0(X) = \frac{X-x_1}{x_0-x_1} \frac{X-x_2}{x_0-x_2}.$	$L_1(X) = \frac{X-x_0}{x_1-x_0} \frac{X-x_2}{x_1-x_2}.$	$L_2(X) = \frac{X-x_0}{x_2-x_0} \frac{X-x_1}{x_2-x_1}.$

**Exemple 1.** On considère les points  $x = [-2, 0, 1, 2]$ . On va calculer les polynômes de la base de Lagrange associée à ces points d'interpolation.

En reprenant la formule de la Définition 2, on obtient les 4 polynômes suivants :

- $L_0(X) = \frac{X-0}{-2-0} \cdot \frac{X-1}{-2-1} \cdot \frac{X-2}{-2-2} = \frac{-1}{24} X(X-1)(X-2)$
- $L_1(X) = \frac{X-(-2)}{0-(-2)} \cdot \frac{X-1}{0-(-1)} \cdot \frac{X-2}{0-2} = \frac{-1}{4} (X+2)(X-1)(X-2)$
- $L_2(X) = \frac{X-(-2)}{1-(-2)} \cdot \frac{X-0}{1-0} \cdot \frac{X-2}{1-2} = \frac{-1}{3} (X+2)X(X-2)$
- $L_3(X) = \frac{X-(-2)}{2-(-2)} \cdot \frac{X-0}{2-0} \cdot \frac{X-1}{2-1} = \frac{1}{8} (X+2)X(X-1).$

On va maintenant énoncer et démontrer la (tant attendue) proposition suivante : Les polynômes de la base de Lagrange  $(L_0, \dots, L_d)$  forment une base de  $\mathbb{R}_d[X]$  ! Et on va aussi voir pourquoi elle est bien adaptée au problème d'interpolation (je vous ai promis que l'expression de  $P$  dans cette base était simple !)

**Proposition 1.** (Base de Lagrange, Forme de Lagrange)

1- Les polynômes  $L_0, L_1, \dots, L_d$  vérifient :

$$\forall i = 0 \dots d, \forall j = 0, \dots, d, L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

autrement dit,  $L_i$  vaut 1 au point  $x_i$  (de même indice) et 0 aux autres points d'interpolation.

2- La famille de polynômes  $(L_0, \dots, L_d)$  forme une base de  $\mathbb{R}_d[X]$  appelée *base de Lagrange associée aux points d'interpolation*  $x_0, \dots, x_d$ .

3- Étant donné  $d + 1$  réels quelconques  $y_0, \dots, y_d$ , le polynôme  $P_d$  d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 0 \dots d$  s'écrit dans la base de Lagrange :

$$P_d(X) = \sum_{i=0}^d y_i L_i(X).$$

On parle de la *forme de Lagrange* de  $P_d$  (en opposition à son écriture dans la base canonique)

**Remarque 2.** Il est à noter qu'on ne parle ici que de *l'écriture* de  $P_d$  qui varie. C'est le même polynôme écrit sous une forme différente (on a montré que ce polynôme est unique).

**Preuve :**

1- Fixons un entier  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ , alors, par définition de  $L_i$ ,

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1^d = 1.$$

Soit maintenant  $j \in \{0, 1, \dots, d\}$ ,  $j \neq i$ , alors, toujours par définition,

$$L_i(x_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^d \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}.$$

(attention, j'ai modifié la variable muette sous le produit pour éviter d'avoir deux  $j$  pour des objets différents et de faire n'importe quoi...). Comme on a choisi  $j \neq i$  et que  $k$  parcourt *toutes les valeurs entre 0 et d sauf i*, dans le produit se trouve le cas  $k = j$  et alors on multiplie par  $\frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0$ . Le produit total est donc nul ! CQFD



- 2- Pour montrer que  $(L_0, \dots, L_d)$  est une base de  $\mathbb{R}_d[X]$ , il faut commencer par montrer que pour tout  $i = 0, \dots, d$ ,  $L_i \in \mathbb{R}_d[X]$ , c'est-à-dire que  $L_i$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$ . Par définition,  $L_i$  s'écrit comme un produit de  $d+1-1 = d$  polynômes de degré 1 (dans le produit il y a  $d+1$  éléments entre 0 et  $d$  et on retire le cas  $j = i$  ce qui en laisse  $d$ ). On a donc bien une famille de  $d+1$  polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ . Or, on sait que  $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d+1$ , on a donc le nombre nombre d'éléments dans la base. Il suffit donc de montrer que la famille est libre (voir votre cours d'algèbre linéaire).

NB : JE N'AI PAS DIT "Comme elle a le bon nombre d'éléments, elle est génératrice". J'ai bien dit que SI elle a le bon nombre d'éléments ET qu'elle est LIBRE, alors elle est aussi génératrice.

Pour montrer que la famille est libre, on fait comme toujours : on suppose trouvée une combinaison linéaire nulle et on va montrer que chaque coefficient est nécessairement nul.

Supposons trouvés  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$  tels que :

$$\alpha_0 L_0(X) + \alpha_1 L_1(X) + \dots + \alpha_d L_d(X) = 0 \quad (4)$$

Il est à noter ici que cette équation " = 0 " est à prendre au sens des polynômes : le terme de gauche est le polynôme nul, il s'annule donc en toute valeur de  $X$ . C'est comme une fonction nulle. Cela contient en quelque sorte une infinité d'équations en choisissant différentes valeurs pour  $X$ . C'est exactement ce que l'on va faire : évaluer (4) en différentes valeurs de  $X$ , par exemple  $X = x_0, X = x_1, \dots$

On obtient ainsi en  $X = x_0$  :

$$\alpha_0 L_0(x_0) + \alpha_1 L_1(x_0) + \dots + \alpha_d L_d(x_0).$$

Or,  $L_0(x_0) = 1$  et, pour tout  $i \neq 0$ ,  $L_i(x_0) = 0$  d'après le point 1- de la proposition. Il reste donc finalement  $\alpha_0 = 0$ . On fait de même avec  $X = x_1, \dots, X = x_d$  et on obtient

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0.$$

La famille est donc libre, c'est donc bien une base. CQFD

- 3- On a montré au point 2- que la famille  $(L_0, \dots, L_d)$  est une base de  $\mathbb{R}_d[X]$ . Or, on sait aussi que le polynôme d'interpolation  $P$  que l'on cherche est dans  $\mathbb{R}_d[X]$ . On le cherche donc dans la base  $(L_0, \dots, L_d)$  : on va montrer qu'il existe un unique  $(a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  tels que  $P = a_0 L_0 + a_1 L_1 + \dots + a_d L_d$  soit le polynôme d'interpolation associé aux points  $(x_i, y_i)$ . C'est le cas si et seulement si pour tout  $i = 0, \dots, d$ ,

$$P(x_i) = y_i \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d a_k L_k(x_i) = y_i \Leftrightarrow a_i L_i(x_i) + \sum_{k \neq i} a_k L_k(x_i) = y_i. \quad (5)$$

Or, pour  $i$  fixé, on sait que  $L_i(x_i) = 1$  et pour tout  $k \neq i$ ,  $L_k(x_i) = 0$  d'après le point 1- de la proposition. Donc, dans (5),

$$y_i = a_i L_i(x_i) + \sum_{k \neq i} a_k L_k(x_i) \Leftrightarrow a_i = y_i.$$

Le polynôme d'interpolation est donc bien  $P(X) = \sum_{i=0}^d y_i L_i(X)$ .

**Remarque 3.** En reprenant les polynômes calculés dans l'Exemple 1, on voit effectivement que les polynômes ainsi calculés sont tous de degré 3 et prennent bien les valeurs indiquées par la Proposition 1.

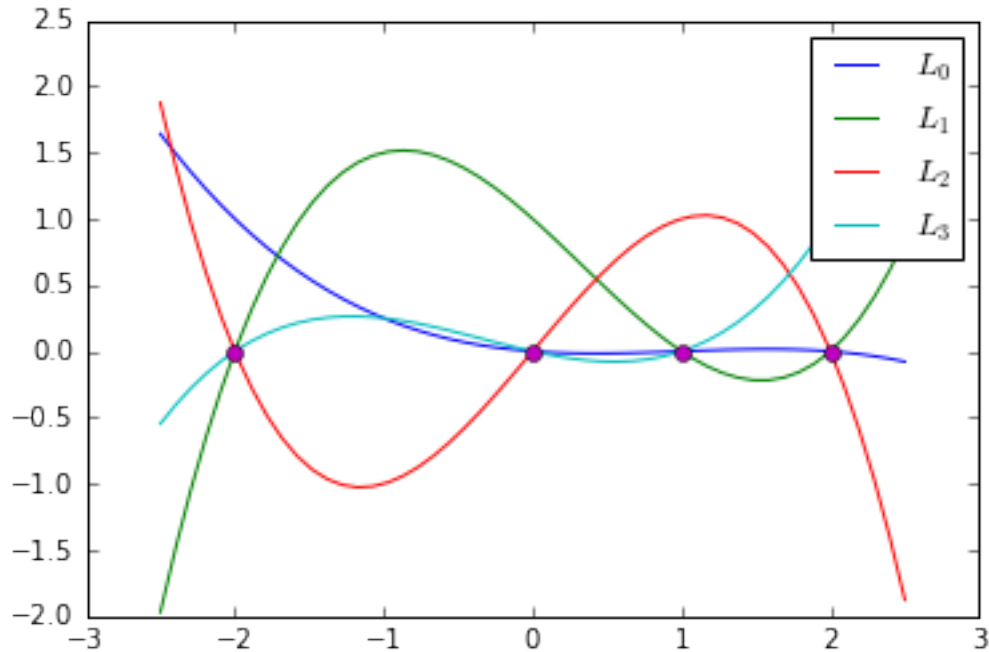


FIGURE 2 – Graphes des polynômes de la base de Lagrange associée aux points  $x = [-2, 0, 1, 2]$

On a tracé sur la Figure 2 les courbes représentatives de ces polynômes. On a placé les points d'abscisses  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et d'ordonnée 0 pour bien visualiser les valeurs de chaque polynôme en chaque point d'abscisse  $x_i$ .

### 1.3.2 Forme de Newton

Si vous avez bien compris la démarche de la sous-section précédente, vous devez vous douter que l'on va introduire une nouvelle écriture du polynôme d'interpolation de Lagrange... probablement dans une nouvelle base... Pourquoi faire ça ?

Imaginons que l'on aie trouvé le polynôme d'interpolation de Lagrange pour 3 points, et on veut en ajouter un 4ème. . .

Si vous utilisez la méthode "système", vous changez complètement le système et la matrice de Vandermonde et il vous faut tout refaire. . .

Si vous utilisez la base de Lagrange, mauvaise surprise, le point  $x_3$  que vous avez ajouté va intervenir dans tous les autres polynômes de la base de Lagrange : il faut tout refaire. . .

C'est dommage, puisque le polynôme  $P_2$  que l'on avait fabriqué a les bonnes valeurs pour  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$ ... c'est déjà pas mal, il faudrait pouvoir ré-utiliser cela !

C'est l'idée de la base de Newton : on va chercher le nouveau polynôme  $P_3$  sous la forme

$$P_3(X) = P_2(X) + \alpha(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2).$$

Il sera bien en effet de degré inférieur ou égal à 3 (puisque  $P_2$  était de degré inférieur ou égal à 2), et il vaudra bien la même chose que  $P_2$  en  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$  par construction.

Maintenant que vous avez compris l'idée, on va construire cette forme de Newton "par récurrence".

NB : il y a une différence pour cette sous-section entre comprendre la construction de la forme de Newton (c'est très bien de la comprendre), et savoir calculer un polynôme d'interpolation sous forme de Newton. Il ne sera pas nécessaire donc d'avoir tout compris ici, nous finirons par un exemple pour montrer la technique que vous devez connaître et savoir appliquer.

Dans toute cette section on va noter  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_d\}$   $d + 1$  réels deux à deux distincts d'un intervalle  $[a, b]$ , on va considérer une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$ , et noter  $P[A, f]$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points de  $A$ .

**Définition 3.** (Différences divisées)

On note  $f[x_0, \dots, x_d]$  le coefficient de  $X^d$  dans le polynôme  $P[A, f]$  d'interpolation de Lagrange de  $f$  aux points de  $A = \{x_0, \dots, x_d\}$ . On l'appelle *d-ième différence divisée de f aux points  $x_0, \dots, x_d$* .

**Exemple 2.** (Cas  $d = 0$  et  $d = 1$ , 1ère et 2nde différence divisée de  $f$ )

1. Dans le cas  $d = 0$  (un seul point  $A = \{x_0\}$ ), on a vu que  $P[A, f]$  est le polynôme constant  $P[A, f](X) = f(x_0)$ .

Le coefficient de  $x^0 = 1$  dans ce polynôme est donc  $f[x_0] = f(x_0)$ , tout simplement !

2. Dans le cas où  $d = 1$  et donc  $A = \{x_0, x_1\}$ . On a déjà vu qu'alors

$$P[A, f](X) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(X - x_0) + f(x_0).$$

Par définition,  $f[x_0, x_1]$  est le coefficient de  $X$  dans  $P[A, f]$ , c'est-à-dire ici :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

**Théorème 2.** (Forme de Newton)

Étant donné un intervalle  $[a, b]$ , une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  et  $d + 1$  réels deux à deux distincts de  $[a, b]$  notés  $A = \{x_0, \dots, x_d\}$ , alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points de  $A$  s'écrit :

$$P[A, f](X) = f(x_0) + \sum_{j=1}^d f[x_0, \dots, x_j](X - x_0) \dots (X - x_{j-1}).$$

On parlera de la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$ , ou encore son écriture dans la base de Newton.

**Exemple 3.** (Retour au cas  $d = 1$ )

Dans le cas où  $d = 1$  et donc  $A = \{x_0, x_1\}$ . On a déjà vu qu'alors

$$P[A, f](X) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(X - x_0) + f(x_0),$$

ce qui correspond bien à la formule annoncée.

### Preuve du théorème 2

Pour cette preuve, on raisonne par récurrence sur  $d$ , ce qui est cohérent avec l'idée que l'on a eue : quand on rajoute un point  $x_{d+1}$ , on part du polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux  $d + 1$  premiers points  $x_0, \dots, x_d$ .

Fixons donc un entier  $d \geq 0$ , considérons  $A_d = \{x_0, \dots, x_d\}$  et appelons  $\mathcal{P}_d$  la propriété :

$$(\mathcal{P}_d) \quad P[A_d, f](X) = f(x_0) + \sum_{j=1}^d f[x_0, \dots, x_j](X - x_0) \dots (X - x_{j-1}).$$

Cas  $d = 0$  :  $A_0 = \{x_0\}$  et on sait que  $P[A_0, f] = f(x_0)$ ,  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.

Supposons  $\mathcal{P}_d$  vérifiée pour un entier  $d$ , montrons qu'en ajoutant un point  $x_{d+1}$ ,  $\mathcal{P}_{d+1}$  est encore vérifiée. On va noter

$$Q(X) = P[A_{d+1}, f](X) - f[x_0, \dots, x_{d+1}](X - x_0) \dots (X - x_d).$$

Or, par définition,  $P[A_{d+1}, f]$  est de degré inférieur ou égal à  $d + 1$  et le coefficient de  $x^{d+1}$  est  $f[x_0, \dots, x_{d+1}]$ . De plus,  $f[x_0, \dots, x_{d+1}](X - x_0) \dots (X - x_d)$  est de degré  $d + 1$  et de coefficient dominant  $f[x_0, \dots, x_{d+1}]$ . Ainsi,  $Q$  est en fait de degré inférieur ou égal à  $d$ .

De plus, il est clair par construction que pour tout  $i = 0, \dots, d$ ,  $Q(x_i) = P[A_{d+1}, f](x_i) = f(x_i)$  par définition de  $P[A_{d+1}, f]$ . Ainsi,  $Q$  est par unicité LE polynôme d'interpolation de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$  qui est  $P[A_d, f]$ , c'est-à-dire que

$$Q(X) = P[A_{d+1}, f](X) - f[x_0, \dots, x_{d+1}](X - x_0) \dots (X - x_d) = P[A_d, f](X).$$

Ce qui, en remettant tout dans le bon sens donne :

$$P[A_{d+1}, f](X) = P[A_d, f](X) + f[x_0, \dots, x_{d+1}](X - x_0) \dots (X - x_d),$$

or, l'hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}_d$  fournit :

$$P[A_d, f](X) = f(x_0) + \sum_{j=1}^d f[x_0, \dots, x_j](X - x_0) \dots (X - x_{j-1})$$

on a donc, en compilant les deux dernières égalités :

$$P[A_{d+1}, f](X) = f(x_0) + \sum_{j=1}^d f[x_0, \dots, x_j](X - x_0) \dots (X - x_{j-1}) \\ + f[x_0, \dots, x_{d+1}](X - x_0) \dots (X - x_d)$$

et donc enfin :

$$P[A_{d+1}, f](X) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{d+1} f[x_0, \dots, x_j](X - x_0) \dots (X - x_{j-1})$$

et ainsi  $\mathcal{P}_{d+1}$  est vérifiée.

**Théorème 3.** (Formule de calcul des différences divisées) Avec les mêmes hypothèses que le Théorème 2, les différences divisées s'obtiennent par la formule de récurrence

$$\forall d \geq 1, f[x_0, \dots, x_d] = \frac{f[x_1, \dots, x_d] - f[x_0, \dots, x_{d-1}]}{x_d - x_0}. \quad (6)$$

### Preuve du Théorème 3

On fixe un entier  $d \geq 1$ , et on va noter, pour avoir des notations relativement simples  $P_{d-1} = P[\{x_0, \dots, x_{d-1}\}, f]$  et  $P_{d-1}^* = P[\{x_1, \dots, x_d\}, f]$  les polynômes d'interpolation de Lagrange de  $f$  associés à  $x_0, \dots, x_{d-1}$  et  $x_1, \dots, x_d$  respectivement.

Par définition,  $P_{d-1}$  et  $P_{d-1}^*$  sont tous deux de degré inférieur ou égal à  $d - 1$  et de coefficients de  $X^{d-1}$  respectivement  $f[x_0, \dots, x_{d-1}]$  et  $f[x_1, \dots, x_d]$ .

Soit maintenant

$$Q_d(X) = \frac{(X - x_0)P_{d-1}^*(X) - (X - x_d)P_{d-1}(X)}{x_d - x_0}.$$

Il est clair par construction que  $Q_d$  est de degré inférieur ou égal à  $d$  et :

$$Q_d(x_0) = P_{d-1}(x_0) = f(x_0), \quad Q_d(x_d) = P_{d-1}^*(x_d) = f(x_d)$$

et enfin, pour tout  $i = 1, \dots, d$  :

$$Q_d(x_i) = \frac{(x_i - x_0)f(x_i) - (x_i - x_d)f(x_i)}{x_d - x_0} = f(x_i).$$

Par unicité,  $Q_d$  est donc LE polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé à  $x_0, \dots, x_d$ , il est de degré inférieur ou égal à  $d$  et le coefficient de  $X^d$  est par définition  $f[x_0, \dots, x_d]$ . C'est-à-dire que

$$P[\{x_0, \dots, x_d\}, f] = \frac{(X - x_0)P_{d-1}^*(X) - (X - x_d)P_{d-1}(X)}{x_d - x_0}.$$

En identifiant les coefficients de  $X^d$  dans cette égalité, on obtient :

$$f[x_0, \dots, x_d] = \frac{f[x_1, \dots, x_d] - f[x_0, \dots, x_{d-1}]}{x_d - x_0}.$$

C'est ce que l'on devait démontrer.

**Exemple de Calcul des différences divisées :** (Exercice 9, TD1)

On souhaite ici calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$f : x \mapsto x(x^2 - 1)$  associé aux points  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

On se posera ensuite la même question en ajoutant le point  $x_3 = -2$ .

$x_i$	$f(x_i)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$
-1	0		
1	0	$\frac{0-0}{1+1} = 0$	
2	6	$\frac{6-0}{2-1} = 6$	$\frac{6-0}{2-(-1)} = 2$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $-1$ ,  $1$ ,  $2$  s'écrit donc, d'après le théorème 2 :

$$P_3(X) = 0 + 0 * (X - (-1)) + 2 * (X + 1)(X - 1) = 2(X + 1)(X - 1).$$

Si on veut ajouter le point  $x_3 = -2$ , il suffit de rajouter la ligne correspondant à  $x_3$  dans le tableau précédent (sans refaire tous les calculs, il suffit d'ajouter une ligne) :

$x_i$	$f(x_i)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
-1	0			
1	0	$\frac{0-0}{1+1} = 0$		
2	6	$\frac{6-0}{2-1} = 6$	$\frac{6-0}{2-(-1)} = 2$	
-2	-6	$\frac{-6-6}{-2-2} = 3$	$\frac{3-6}{-2-1} = 1$	$\frac{1-2}{-2+1} = 1$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $-1$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $-2$  s'écrit donc, d'après le théorème 2 :

$$P_3(X) = 2*(X+1)(X-1)+1*(X+1)(X-1)(X-2) = 2(X+1)(X-1)+(X+1)(X-1)(X-2).$$

Ici, la base de Newton est donnée par :  $\{1, X+1, (X+1)(X-1), (X+1)(X-1)(X-2)\}$ . On laisse en exercice la vérification que cela fournit bien une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

## 1.4 Étude de l'erreur d'interpolation

On a répondu jusque là à la première question que l'on se posait : étant donnée une fonction  $f$  connue en quelques points  $x_0, \dots, x_d$ , comment peut-on construire un polynôme qui prend les mêmes valeurs que  $f$  aux points donnés et qui soit de degré minimal ?

Supposons maintenant que l'on approche  $f$  par ce polynôme. On souhaite savoir quelle est l'erreur que l'on fait en faisant cette approximation. Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$ , que  $x_0, \dots, x_d$  sont  $d + 1$  points deux à deux distincts de  $[a, b]$  et  $P_f$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$ , on appelle *erreur d'interpolation de Lagrange* la quantité

$$E_f(x) = f(x) - P_f(x).$$

**Remarque 4.** Il est à noter que l'on peut s'intéresser à l'erreur en chaque point, à sa valeur absolue ou encore au maximum de cette erreur en valeur absolue. On trouvera parfois dans les exercices ou les livres l'erreur définie comme :

$$E_f(x) = |f(x) - P_f(x)|, \text{ ou encore } E_f = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_f(x)|.$$

Graphiquement, cela revient à estimer le plus grand écart entre les courbes de  $f$  et la courbe représentative du polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$ . On a envie de dire que, plus on choisit de points, plus l'erreur sera petite. . . mais on va quantifier cela grâce au théorème suivant, appelé *Théorème d'approximation de Lagrange*.

**Théorème 4.** (Erreur d'approximation)

Soient deux réels  $a < b$  et  $d + 1$  réels deux à deux distincts  $x_0, \dots, x_d$  dans  $[a, b]$ . Étant donnée une fonction  $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$ , on note  $P_f$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$ . Alors, pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\alpha_x \in [a, b]$  tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(d+1)}(\alpha_x)}{(d+1)!} \prod_{i=0}^d (x - x_i). \quad (7)$$

**Remarque 5.** Le polynôme qui apparaît dans le membre de droite  $\prod_{i=0}^d (X - x_i)$  est généralement appelé *polynôme nodal* et noté  $\Pi_d(X)$ . C'est un polynôme de degré  $d + 1$  qui s'annule en tous les  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

Il est facile d'obtenir une majoration de l'erreur maximale sur  $[a, b]$  en remarquant que

$$\forall x \in [a, b], \quad \left| \prod_{i=0}^d (x - x_i) \right| \leq (b - a)^{d+1},$$

ce qui donne finalement :

$$E_f = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b - a)^{d+1}}{(d + 1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(d+1)}(x)|.$$

Il est clair que la partie  $\frac{(b-a)^{d+1}}{(d+1)!}$  tend vers 0 quand  $d$  tend vers l'infini (c'est-à-dire pour un grand nombre de points d'interpolation). Néanmoins, il se peut que le comportement de  $\max_{x \in [a,b]} |f^{d+1}(x)|$  compense cette convergence vers 0.

Prenons deux exemples :

- $f(x) = e^x$ . On sait dans ce cas que, quel que soit  $d$  :  $f^{(d+1)}(x) = e^x \leq e^b$  sur  $[a, b]$ .  
On a alors

$$E_f = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{d+1}}{(d+1)!} e^b \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$

- $f(x) = x^{d+1}$ . Il est clair dans ce cas (cela se montre par exemple par récurrence) que  $f^{d+1}(x) = (d+1)!$ . Alors

$$E_f = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{d+1}}{(d+1)!} (d+1)! = (b-a)^{d+1}$$

qui ne tend en général pas vers 0 quand  $d$  grandit.

Le comportement de  $f^{(d+1)}$  est donc un point clef dans cette erreur. Calculer le maximum du polynôme nodal de manière un peu plus "subtile" est difficile en général. Cela dépend du choix de la répartition des points  $x_0, \dots, x_d$  dans  $[a, b]$ . Il existe un choix optimal pour cette répartition (on appelle ces points  $x_0, \dots, x_d$  les points de Chebyshev et on peut en donner une formule, que l'on verra en TP.)

**Remarque 6.** Dans le cas  $d = 0$  (un seul point  $x_0$ ) et  $f \in C^1([a, b])$ , on a déjà vu que  $P_f(X) = f(x_0)$ . Le théorème 4 s'écrit alors : pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\alpha_x \in ]a, b[$  tel que :

$$f(x) - f(x_0) = f'(\alpha_x)(x - x_0)$$

qui n'est autre que le *théorème des accroissements finis*.

**Preuve du Théorème 4 :** Soit  $x$  fixé dans  $[a, b]$  pour la suite de la preuve. Par souci de clarté, on note  $P_f$  le polynôme d'interpolation de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_d$  et  $\Pi_d(x) = \prod_{i=0}^d (x - x_i)$ .

- Naturellement, si  $x$  est l'un des  $x_i$ , alors le résultat est trivial :  $0 = 0$ .
- On suppose pour la suite de la preuve que, pour tout  $i = 0, \dots, d$ ,  $x \neq x_i$ , ce qui assure que  $\Pi_d(x) \neq 0$ . On pose alors

$$\forall t \in [a, b], \quad Q(t) = P_f(t) + \frac{f(x) - P_f(x)}{\Pi_d(x)} \Pi_d(t).$$

Pour bien comprendre cette preuve, il faut se souvenir que  $x$  est fixé. Ce n'est plus une variable (c'est pourquoi on a choisi un autre nom de variable :  $t$  pour définir  $Q$ ). Par construction,  $P_f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$ , et  $\Pi_d$  est un polynôme de degré  $d + 1$ . Donc,  $Q$  est un polynôme (en  $t$ ) de degré



$d + 1$ .

Posons encore  $F(t) = f(t) - Q(t)$ . Pour  $i = 0, \dots, d$ , on a

$$F(x_i) = f(x_i) - P_f(x_i) - \frac{f(x) - P_f(x)}{\Pi_d(x)} \Pi_d(x_i).$$

Or, par définition,  $P_f(x_i) = f(x_i)$  et  $\Pi_d(x_i) = 0$ , donc finalement,  $F(x_i) = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, d$ . Par ailleurs, il est clair que, en  $t = x$  :

$$F(x) = f(x) - P_f(x) - \frac{f(x) - P_f(x)}{\Pi_d(x)} \Pi_d(x) = f(x) - P_f(x) - f(x) + P_f(x) = 0.$$

Ainsi,  $F$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{d+1}$  (comme  $f$ ) qui s'annule en  $x_0, \dots, x_d$  et  $x$ . D'après le corollaire du théorème de Rolle suivant :

**Lemme :** Pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{d-1}$  sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $f^{(d-1)}$  dérivable sur  $]a, b[$ , qui s'annule en  $d + 1$  points distincts, il existe  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $f^{(d)}(\alpha) = 0$ .

Notre fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^{d+1}$  et s'annule en  $d + 2$  points distincts ( $x_0, \dots, x_d$  et  $x$ ). Il existe donc  $\alpha_x \in ]a, b[$  tel que  $F^{(d+1)}(\alpha_x) = 0$ .

Or,

$$F^{(d+1)}(t) = f^{(d+1)}(t) - P_f^{(d+1)}(t) - \frac{f(x) - P_f(x)}{\Pi_d(x)} \Pi_d^{(d+1)}(t).$$

Examinons les termes apparaissant dans cette dérivée :

—  $P_f^{(d+1)}(t) = 0$  car  $P_f$  est de degré inférieur ou égal à  $d$  par définition

—  $\Pi_d^{(d+1)}(t) = (d + 1)!$

Ainsi :

$$0 = f^{(d+1)}(\alpha_x) - \frac{f(x) - P_f(x)}{\Pi_d(x)} (d + 1)!$$

Ce qui amène finalement à :

$$f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(d+1)}(\alpha_x)}{(d + 1)!}$$

qui est ce que l'on devait démontrer.

## 2 Méthodes de calcul approché d'intégrales

Comme son nom l'indique, cette section va s'attacher à la mise en place de méthodes pour calculer les intégrales de manière approchée. La question est de calculer la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  donné. Ici, on ne cherche pas à obtenir une formule de type

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ , mais plutôt un résultat du type

$$\int_a^b f(x)dx \approx 0.78932145$$

autrement dit, une approximation (bonne, dans la mesure du possible), de la valeur du réel  $\int_a^b f(x)dx$ . Pourquoi faire cela si on peut avoir une formule exacte? Deux raisons pour motiver ce travail :

- Même lorsque l'on a une formule explicite pour la fonction  $f$ , on ne peut pas toujours avoir une formule pour une primitive de  $f$  (c'est même très rarement le cas).
- On peut avoir besoin de calculer l'intégrale d'une fonction que l'on ne connaît pas en tout point, mais seulement en certains points.

On a alors plusieurs façons de faire... Soit on essaie de construire une formule simple à partir de ces valeurs de  $f$ , soit on essaie d'approcher  $f$  (par exemple en faisant de l'interpolation polynômiale) et on calcule l'intégrale de son polynôme d'interpolation (ce qui est facile à faire).

*Mais du coup, c'est quoi une méthode de calcul approché d'intégrale ?*

Les méthodes que l'on va étudier dans ce chapitre seront toutes définies par la donnée de  $(n + 1)$  couples  $(\lambda_i, x_i)$ ,  $i = 0 \dots n$ , où les  $\lambda_i$  sont des réels quelconques et les  $x_i$  sont des réels de l'intervalle  $[a, b]$  deux à deux distincts.

La méthode d'intégration numérique appliquée à une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est alors définie par la formule :

$$J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{pour approcher} \quad I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

**NB :** Traditionnellement, étant donnée une fonction  $f$ , on notera en général  $J(f)$  une méthode d'approximation numérique et par  $I(f)$  l'intégrale exacte que l'on cherche à approcher.

**Démarche :**

- Les  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  sont donnés dans  $[a, b]$ , deux à deux distincts. On ne s'intéressera en général pas à la question de savoir comment on les choisit (sauf dans quelques exercices).

- On va donc chercher à comprendre comment choisir les  $\lambda_i$ ,  $i = 0 \dots n$  pour que la méthode  $J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$  soit une "bonne" approximation de  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ .
- On va (évidemment) chercher à estimer/majorer l'erreur d'approximation  $|J(f) - I(f)|$ .

### Hypothèses, Remarques :

- On suppose que  $f$  est régulière, au moins continue sur  $[a, b]$  (on précisera la régularité de  $f$  quand c'est nécessaire).
- On notera en général avec un  $J$  la méthode approchée, et avec un  $I$  la valeur exacte
- Il est à noter que le choix que l'on a fait d'une combinaison linéaire de valeurs de  $f$  pour les méthodes numériques fait que les applications

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad f \mapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{sont toutes les deux linéaires.}$$

Ceci constitue une propriété très importante pour la suite.

- On commettra régulièrement l'abus de notation suivant (lorsque l'on applique la méthode à un polynôme notamment) : on notera  $J(X)$  lorsque l'on applique la méthode numérique à la fonction  $f(x) = x$ , ou  $J(1)$  lorsque l'on applique la méthode numérique à la fonction  $f(x) = 1$ , ou encore  $J(X^2)$  lorsque l'on applique la méthode numérique à la fonction  $f(x) = x^2 \dots$  Il faut que vous ayez conscience que c'est un abus de notation, on devrait écrire  $J(x \mapsto x)$ ,  $J(x \mapsto 1)$  ou encore  $J(x \mapsto x^2)$ . Il faut donc que ce que cette notation représente soit très clair pour vous.

## 2.1 Définitions, Exemples

### 2.1.1 Degré d'exactitude

On considère dans toute la suite de la section  $n + 1$  réels  $x_0, \dots, x_n$  d'un intervalle  $[a, b]$ , deux à deux distincts ainsi que  $n + 1$  réels quelconques  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ . On s'intéresse dans la suite de ce chapitre à la méthode d'intégration numérique sur  $[a, b]$  suivante, définie pour toute fonction  $f$  au moins continue sur  $[a, b]$  :

$$J_{a,b}(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i). \tag{8}$$

**Définition 4.** On dit que la méthode d'intégration numérique sur  $[a, b]$  définie par (8) est de degré d'exactitude  $d$  si

- Pour tout  $P \in \mathbb{R}_d[X]$ , on a :

$$J_{a,b}(P) := \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = \int_a^b P(x)dx,$$

autrement dit, la méthode  $J_{a,b}$  est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ .

— Il existe  $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$  tel que  $J_{a,b}(P) \neq \int_a^b P(x)dx$ .

**Remarque 7.** Par linéarité, il est équivalent de dire :

- $J_{a,b}$  est de degré d'exactitude au moins  $d$
- $J_{a,b}$  est exacte pour tous les polynômes d'une base de  $\mathbb{R}_d[X]$ , en particulier :  $J_{a,b}$  est exacte pour tous les polynômes de la base canonique de  $\mathbb{R}_d[X]$ , c'est-à-dire

$$\forall k = 0 \dots d, \quad J_{a,b}(X^k) = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

**Méthode degré d'exactitude :** Par conséquent, pour montrer que  $J_{a,b}$  est de degré d'exactitude  $d$ , on montrera en général que :

1. pour tout  $k = 0, \dots, d$ ,  $J_{a,b}(X^k) = \int_a^b x^k dx$
2.  $J_{a,b}(X^{d+1}) \neq \int_a^b x^{d+1} dx$ .

Attention, montrer uniquement le point 1. ne suffit pas pour montrer que la méthode est de degré d'exactitude  $d$ . Il ne faut pas oublier le second point.

### 2.1.2 Changement d'intervalle

Vous voyez assez vite qu'il est compliqué de faire les calculs sur un intervalle  $[a, b]$  quelconque, à cause des puissances de  $a$  et  $b$  que l'on traîne partout... En fait, grâce aux formules de changement de variable dans les intégrales, on peut tout à fait définir (et étudier) les méthodes d'intégration numérique sur un intervalle plus simple (par exemple  $[0, 1]$ , ou  $[-1, 1]$ ) puis les "transférer" par changement de variable sur un intervalle  $[a, b]$  quelconque *sans changer le degré d'exactitude de la méthode*.

Supposons définie une méthode à  $n + 1$  points, de degré d'exactitude  $d$  sur  $[0, 1]$  : pour toute fonction continue  $f$  définie sur  $[0, 1]$

$$J_{0,1}(f) = \sum_{i=0}^n \nu_i f(\theta_i), \quad \text{où } \forall i = 0 \dots n, \theta_i \in [0, 1] \text{ deux à deux distincts et } \nu_i \in \mathbb{R}.$$

On souhaite définir une méthode sur  $[a, b]$  de même degré d'exactitude. Pour cela, on rappelle que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t)dt = (b-a) \int_0^1 g(t)dt \quad (9)$$

en posant le changement de variable affine  $x = a + (b-a)t$  et en définissant sur  $[0, 1]$  :

$$g(t) = f(a + (b-a)t).$$

On peut alors approcher  $\int_0^1 g(t)dt$  par la méthode numérique  $J_{0,1}$  :

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \sum_{i=0}^n \nu_i g(\theta_i) = \sum_{i=0}^n \nu_i f(a + (b-a)\theta_i)$$

En posant  $\lambda_i = (b-a)\nu_i$  et  $x_i = a + (b-a)\theta_i$ , on obtient bien une méthode qui permet d'approcher  $\int_a^b f(x)dx$  de la forme recherchée :

$$J_{a,b} = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n (b-a)\nu_i f(a + (b-a)\theta_i).$$

Reste à montrer que cette méthode a le même degré d'exactitude que  $J_{0,1}$ . Pour cela, on va appliquer la méthode précédente en utilisant le fait que la méthode  $J_{0,1}$  sur  $[0, 1]$  est de degré d'exactitude  $d$ .

1. Montrons que pour tout  $k = 0, \dots, d$ , on a  $J_{a,b}(X^k) = \int_a^b x^k dx$ . Pour cela, on fixe un  $k$  entre 0 et  $d$  et on utilise la formule de changement de variable (9) :

$$\int_a^b x^k dx = (b-a) \int_0^1 (a + (b-a)t)^k dt.$$

On utilise maintenant le fait que  $t \mapsto (a + (b-a)t)^k$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$  (à noter que cela utilise de manière cruciale le choix d'un changement de variable *affine*), donc, la méthode  $J_{0,1}$  est exacte pour ce polynôme, et l'on a donc

$$\int_0^1 (a + (b-a)t)^k dt = \sum_{i=0}^n \nu_i (a + (b-a)\theta_i)^k.$$

Or, on a défini  $x_i = a + (b-a)\theta_i$  et  $\lambda_i = (b-a)\nu_i$ . En remettant tout ensemble on a donc finalement :

$$\int_a^b x^k dx = (b-a) \int_0^1 (a + (b-a)t)^k dt = (b-a) \sum_{i=0}^n \nu_i (a + (b-a)\theta_i)^k = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i^k = J_{a,b}(X^k),$$

qui est précisément ce que l'on voulait démontrer.

2. Reste à montrer que  $J_{a,b}$  n'est pas exacte pour au moins un polynôme de degré  $d+1$ . Pour cela, on va procéder exactement de la même façon en utilisant le fait que

$$\int_0^1 t^{d+1} dt \neq J_{0,1}(X^{d+1}) = \sum_{i=0}^n \nu_i \theta_i^{d+1}$$

puis en se ramenant sur  $[a, b]$  par changement de variable  $t = \frac{x-a}{b-a}$ . Ainsi, on part de

$$\int_0^1 t^{d+1} dt \neq J_{0,1}(X^{d+1}) = \sum_{i=0}^n \nu_i \theta_i^{d+1}$$

puis on écrit

$$\int_0^1 t^{d+1} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{d+1} dx.$$

On a alors

$$\int_0^1 t^{d+1} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{d+1} dx \neq \sum_{i=0}^n \nu_i \theta_i^{d+1}.$$

Or, par définition,  $(b-a)\nu_i = \lambda_i$  et  $\theta_i = \frac{x_i-a}{b-a}$ . On a donc finalement :

$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{d+1} dx \neq (b-a) \sum_{i=0}^n \nu_i \theta_i^{d+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \left(\frac{x_i-a}{b-a}\right)^{d+1} = J_{a,b} \left( \left(\frac{X-a}{b-a}\right)^{d+1} \right)$$

ce qu'il fallait démontrer : on a exhibé un polynôme de degré  $d+1$ , en l'occurrence  $P(X) = \left(\frac{X-a}{b-a}\right)^{d+1}$  dont l'intégrale n'est pas égale à  $J_{a,b}(P)$ .

**Remarque 8.** Tout cela a l'air un peu technique si on l'écrit en détail, mais la seule chose qui joue ici, est que le degré d'un polynôme est *conservé par changement de variable affine*.

### 2.1.3 Construction des méthodes, existence/unicité

On cherche à approcher  $\int_0^1 f(x)dx$  pour une fonction  $f$  continue. On fixe pour cela  $n+1$  points deux à deux distincts dans  $[0,1]$ . On a plusieurs façons de concevoir des stratégies de construction de ces méthodes d'intégration numérique :

- On peut tenter de construire une méthode de plus haut degré d'exactitude possible en écrivant les équations de degré, puis l'appliquer à  $f$
- On peut approcher  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $x_0 \dots x_n$  puis calculer son intégrale.

On va voir que ces deux stratégies se rejoignent pour fabriquer ces méthodes numériques.

#### Methodes à 1 point $x_0$

— Point de vue [a.] : On cherche à construire une méthode de la forme  $J(f) = \lambda_0 f(x_0)$  qui soit de degré d'exactitude le plus élevé possible,  $x_0$  étant fixé.

Il suffit donc pour définir la méthode de définir  $\lambda_0$ . On écrit pour cela que la méthode doit être exacte pour la fonction constante égale à 1 :

$$J(1) = \lambda_0 f(x_0) = \lambda_0 = \int_0^1 1 dx = 1.$$

La méthode est de degré d'exactitude au moins 0 si et seulement si  $\lambda_0 = 1$ .

Est-elle de degré d'exactitude 1 ? Il suffit pour cela de tester sur la fonction  $f(x) = x$ .

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_0 f(x_0) = x_0$$

Donc la méthode est de degré d'exactitude au moins 1 si et seulement si  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

Peut-elle être de degré d'exactitude 2 ? Il faut alors supposer que  $x_0 = \frac{1}{2}$  et tester la fonction  $f(x) = x^2$ .

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ et } \lambda_0 f(x_0) = x_0^2 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}.$$

Donc, la méthode  $J(f) = f(x_0)$ , appelée *méthode des rectangles* est de degré d'exactitude 0 si  $x_0 \neq \frac{1}{2}$  et de degré d'exactitude 1 si  $x_0 = \frac{1}{2}$  (dans ce cas la méthode est appelée *méthode du point milieu*).

- Point de vue [b.] : On se donne une fonction  $f$  continue, et on l'approche par son polynôme d'interpolation de Lagrange au point  $x_0$ , puis on calcule l'intégrale de ce polynôme. Ce polynôme est (puisque'il n'y a qu'un point) le polynôme constant  $P(X) = f(x_0)$ . Son intégrale sur  $[0, 1]$  vaut donc  $f(x_0)$ , d'où la méthode d'intégration numérique  $J(f) = f(x_0)$ . On peut alors faire les calculs précédents pour étudier son degré d'exactitude.

Graphiquement, cela revient à approcher l'aire contenue sous la courbe représentative de  $f$  entre  $a$  et  $b$  par l'aire d'un rectangle (voir Figure p.25)

**Méthodes à 2 point**  $x_0, x_1$

- Point de vue [a.] : On cherche à construire une méthode de la forme  $J(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1)$  qui soit de degré d'exactitude le plus élevé possible,  $x_0$  et  $x_1$  étant fixés.

Il suffit donc pour définir la méthode de définir  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ .

Elle est de degré au moins 1 si et seulement si

$$\begin{cases} \int_0^1 dx &= \lambda_0 + \lambda_1 \\ \int_0^1 x dx &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement sous la forme du système de Vandermonde suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

qui admet une unique solution car  $x_0$  et  $x_1$  sont distincts. On obtient la méthode :

$$J(f) = \frac{x_1 - 1/2}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{1/2 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

La méthode pourra éventuellement être de degré plus grand en fonction du choix de  $x_0$  et  $x_1$ .

- Point de vue [b.] : On se donne une fonction  $f$  continue et on calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $x_0$  et  $x_1$ . On a déjà vu qu'il s'agit de  $P(X) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (X - x_0)$ . Reste à calculer son intégrale entre 0 et 1 : et on obtient la même formule après un peu de calcul. . .

Graphiquement, cela revient à approcher l'aire contenue sous la courbe représentative de  $f$  entre  $a$  et  $b$  par l'aire d'un trapèze (voir Figure p. 26)

**Théorème 5.** Étant donné un intervalle  $[a, b]$  et  $n + 1$  points deux à deux distincts de  $[a, b]$  notés  $x_0, \dots, x_n$ , il existe un unique  $(n + 1)$ -uplet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  tel que la méthode d'intégration numérique  $J$  définie pour toute fonction continue sur  $[a, b]$  par

$$J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \tag{10}$$

soit de degré d'exactitude au moins  $n$ , c'est-à-dire qu'elle est exacte pour tous les polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On l'appellera *la méthode d'intégration numérique associée aux  $(x_i)_{i=0\dots n}$* .

**Preuve :** La méthode J, cherchée sous la forme (10) est exacte pour tous les polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  si et seulement si elle est exacte pour  $1, X, X^2, \dots, X^n$  d'après la Remarque 7, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall k = 0, \dots, n, \quad J(X^k) = \int_a^b x^k dx.$$

En écrivant ces  $n + 1$  équations, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = b - a \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \\ \vdots \\ \lambda_0 x_0^n + \lambda_1 x_1^n + \dots + \lambda_n x_n^n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \end{array} \right. \quad (11)$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

On reconnaît dans la matrice du système la transposée de la matrice de Vandermonde  $V(x_0, \dots, x_n)$  associée à la famille  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . On a déjà vu que le déterminant de cette matrice est non nul dès lors que les  $x_i$  sont deux à deux disjoints, ce qui est le cas ici. Le système admet donc une unique solution. Il existe donc un unique tel  $(n + 1)$ -uplet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  et donc une unique méthode numérique de la forme (10) qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , ce qui conclut la preuve.

**Proposition 2.** Sous les hypothèses du théorème précédent, étant donnée une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_n$ , alors la méthode  $J$  présentée au Théorème 5 vérifie :

$$J(f) = \int_a^b P_n(x) dx.$$

Cette proposition fait le lien entre les deux points de vue que l'on a exposés précédemment : "fabriquer" une méthode numérique à  $n + 1$  points en lui demandant d'être de degré d'exactitude au moins  $n$  ou approcher la fonction par son polynôme d'interpolation aux points  $x_0, \dots, x_n$  et intégrer ce polynôme : on obtient la même méthode.



**Preuve :** Par définition du polynôme d'interpolation de Lagrange, pour tout  $i = 0 \dots n$ , on a  $P_n(x_i) = f(x_i)$ , donc

$$J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_n(x_i).$$

Or, par définition,  $P_n$  est de degré inférieur ou égal à  $n$ , et, d'après le Théorème 5,  $J$  est une méthode exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , donc en particulier  $J(P_n) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_n(x_i) = \int_a^b P_n(x) dx$ . On a donc bien ce que l'on voulait démontrer.

#### 2.1.4 Quelques exemples de méthodes classiques sur $[a, b]$

##### Méthodes à 1 point : $n = 0$

On a déjà vu ce cas sur  $[0, 1]$  et on a montré que, dans ce cas, la méthode avec  $\lambda_0 = 1$  est de degré d'exactitude 0 en général, 1 si  $x_0 = 1/2$ . Cela se transpose comme suit sur  $[a, b]$

— Cas  $x_0 = a$  : "Rectangles à gauche", degré d'exactitude 0.

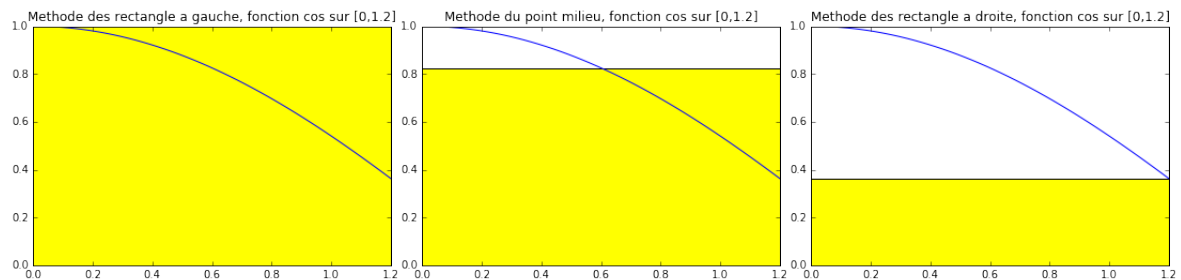
$$\text{sur } [0, 1] : J_{rect}^g(f) = f(0), \quad \text{sur } [a, b] : J_{rect}^g(f) = (b - a)f(a).$$

— Cas  $x_0 = b$  : "Rectangles à droite", degré d'exactitude 0.

$$\text{sur } [0, 1] : J_{rect}^d(f) = f(1), \quad \text{sur } [a, b] : J_{rect}^d(f) = (b - a)f(b).$$

— Cas  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  : "Point milieu", degré d'exactitude 1.

$$\text{sur } [0, 1] : J_{pm}(f) = f(0.5), \quad \text{sur } [a, b] : J_{pm}(f) = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



##### Méthode à 2 points : Méthode des trapèzes $n = 1$ , $x_0 = a$ , $x_1 = b$

On a déjà vu que dans ce cas, sur  $[0, 1]$ , la méthode s'écrit :

$$J(f) = \frac{x_1 - 1/2}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{1/2 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

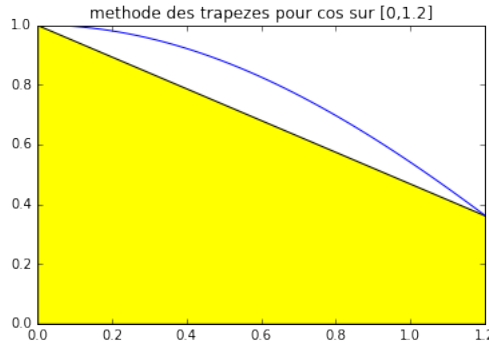
Ainsi, sur  $[0, 1]$ , en choisissant  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ , on obtient :

$$J_{0,1}^{trap}(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)).$$

Elle se "transporte" sur  $[a, b]$  en :

$$J_{a,b}^{trap}(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

On peut vérifier que la méthode est de degré d'exactitude 1.



**Une méthode à 3 points : Méthode de Simpson**  $n = 2$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_2 = b$   
 Commençons par travailler sur  $[0, 1]$  pour simplifier les calculs. Dans ce cas,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ . Comme  $n = 2$ , on cherche  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de sorte que la méthode soit de degré d'exactitude au moins 2, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (12)$$

et donne finalement  $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{6}$  et  $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ . On obtient donc la méthode suivante :

$$J_{0,1}^{simp}(f) = \frac{1}{6} \left( f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right).$$

Reste à étudier son degré d'exactitude : on sait par construction qu'il est au moins 2. Mais il se peut qu'il soit meilleur. On vérifie donc si  $J(X^3) = \int_0^1 x^3 dx$ .

Or,

$$J(X^3) = \frac{1}{6} \left( 0 + 4 * \frac{1}{8} + 1 \right) = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx$$

Elle est donc au moins de degré d'exactitude 3. On vérifie que

$$J(X^4) = \frac{1}{6} \left( 4 * \frac{1}{16} + 1 \right) = \frac{5}{24} \neq \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

La méthode de Simpson est donc de degré d'exactitude 3. Elle se "trasporte" sur  $[a, b]$  quelconque de la façon suivante :

$$J_{a,b}^{simp}(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

## 2.2 Erreur d'intégration numérique

Dans cette partie on cherche à estimer, ou majorer, l'erreur que commet la méthode numérique par rapport à la véritable valeur numérique de l'intégrale en fonction des différents paramètres de la méthode.

On a ici encore (comme souvent en maths), plusieurs manières de s'y prendre. Il y a une manière simple, qui va utiliser les erreurs d'interpolation que l'on a vues dans le premier chapitre mais qui ne donne pas toujours un résultat optimal. On verra donc cette méthode en première partie puis, dans une autre section, on verra comment on peut l'améliorer pour les méthodes qui ont un meilleur degré d'exactitude que  $n$  (comme la méthode de Simpson ou celle du point milieu par exemple).

### 2.2.1 Premières estimations d'erreur

**Définition 5.** Étant donnés  $n + 1$  réels deux à deux distincts  $x_0, \dots, x_n$  d'un intervalle  $[a, b]$  fixé, et la formule d'intégration approchée

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]), \quad J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

associée. Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , on définit l'erreur d'approximation commise par la méthode numérique  $J$  :

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i).$$

**Proposition 3.** Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ , on a la majoration suivante :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i| dx.$$

**Preuve :** On a déjà montré en Proposition 2 que  $J(f) = \int_a^b P_n(x) dx$  où  $P_n$  est le polynôme d'interpolation de  $f$  associé aux points  $x_0, \dots, x_n$ . On a donc :

$$E(f) = I(f) - J(f) = I(f) - I(P_n) = \int_a^b (f(x) - P_n(x)) dx.$$

De plus, on a vu dans le chapitre d'interpolation le résultat suivant sur l'erreur d'interpolation :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Le résultat s'en déduit aisément.

**Remarque 9.** Plusieurs remarques au sujet de cette estimation :

1. On en déduit facilement, en majorant dans l'intégrale chaque distance  $|t - x_i|$  par la longueur totale de l'intervalle  $b - a$  la majoration (un peu brutale mais souvent suffisante) suivante :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \prod_{i=0}^n |t - x_i| dt \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

2. Si on choisit comme fonction  $f$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors, la méthode étant exacte pour  $f$ , on obtient que  $E(f) = 0$ . Dans le membre de droite, du fait de  $\sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , on obtient aussi 0!

### 2.2.2 Raffinement de l'erreur quand c'est possible.

Comme on a commencé à l'expliquer plus haut, dans certains cas, la méthode obtenue peut être plus performante qu'attendu (c'est-à-dire de degré d'exactitude strictement plus grand que  $n$ , comme la méthode de Simpson par exemple). Supposons en effet que la méthode d'intégration numérique qui nous intéresse soit de degré d'exactitude  $d > n$ . Dans ce cas, on sait que la méthode est exacte pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $d$  (mais plus grand que  $n$  strictement), on a alors  $E(P) = 0$ , ce qui ne se voit pas dans notre estimation précédente. En effet, si  $P$  est de degré  $d > n$ , alors  $\sup_{t \in [a,b]} |P^{(n+1)}(t)| \neq 0$ , contrairement au cas où  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n$ . On va donc chercher à améliorer notre estimation dans ce cas.

On considère toujours pour cela  $n + 1$  réels deux à deux distincts dans  $[a, b]$  et  $J_{a,b}$  la méthode d'intégration numérique sur  $[a, b]$  associée, de coefficients  $(\lambda_i)_{i=0 \dots n}$  :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]), \quad J_{a,b}(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i).$$

On veut ici obtenir une estimation avec une constante qui ne dépende pas de la longueur de l'intervalle  $[a, b]$ . On considère donc la méthode  $J_{0,1}$  sur  $[0, 1]$  associée. On rappelle qu'elle a le même degré d'exactitude que  $J_{a,b}$  et qu'elle s'écrit :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \quad J_{0,1}(f) = \sum_{i=0}^n \nu_i f(\theta_i) \quad \text{avec} \quad \theta_i = \frac{x_i - a}{b - a}, \quad \nu_i = \frac{\lambda_i}{b - a}.$$

On peut écrire le théorème suivant :

**Théorème 6.** Étant donnés  $n + 1$  réels deux à deux distincts dans  $[a, b]$  et la méthode d'intégration numérique  $J_{a,b}$  associée avec les notations suivantes :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]), \quad J_{a,b}(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i).$$

Supposons qu'elle soit de degré d'exactitude  $d > n$  et considérons la méthode  $J_{0,1}$  sur  $[0, 1]$  correspondante

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \quad J_{0,1}(f) = \sum_{i=0}^n \nu_i f(\theta_i) \quad \text{avec} \quad \theta_i = \frac{x_i - a}{b - a}, \quad \nu_i = \frac{\lambda_i}{b - a}.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$ , alors :

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^{d+2}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| \left( \frac{1}{d+2} + \sum_{i=0}^n |\nu_i| \right). \quad (13)$$

**Preuve :** La preuve de ce théorème est un peu technique, alors on prend une grande inspiration, on se concentre, et zou, on fonce !

On considère donc une fonction  $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$  et on va commencer par le développement limité de  $f$  en  $a$  à l'ordre  $d$ . La formule de Taylor Lagrange nous dit que, pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe  $\xi_t \in ]a, b[$  (qui dépend de  $t$ , attention, c'est pour ça qu'on le note comme ça) tel que :

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \dots + \frac{f^{(d)}(a)}{d!}(t-a)^d + \frac{f^{(d+1)}(\xi_t)}{(d+1)!}(t-a)^{d+1} := P(t) + R(t)$$

où  $P(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \dots + \frac{f^{(d)}(a)}{d!}(t-a)^d$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$  et, pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$|R(t)| = \left| \frac{f^{(d+1)}(\xi_t)}{(d+1)!} \right| |t-a|^{d+1} \leq \frac{1}{(d+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(d+1)}(x)| |t-a|^{d+1}. \quad (14)$$

On a alors, par linéarité de l'intégrale et de la méthode numérique :  $I(f) = I(P) + I(R)$  et  $J(f) = J(P) + J(R)$ , et donc  $E(f) = E(P) + E(R)$ . Or,  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $d$  qui est le degré d'exactitude de  $J$ , donc, par définition,  $E(P) = 0$ . Il reste donc, pour estimer  $E(f)$  à estimer  $E(R)$ . Allons-y, en utilisant la majoration de  $R$  obtenue en (14) :

$$\begin{aligned} |E(f)| = |E(R)| &= \left| \int_a^b R(t) dt - \sum_{i=0}^n \lambda_i R(x_i) \right| \\ &= \left| \int_a^b R(t) dt - (b-a) \sum_{i=0}^n \nu_i R(x_i) \right| \\ &\leq \int_a^b |R(t)| dt + (b-a) \frac{1}{(d+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| \sum_{i=0}^n |\nu_i| |x_i - a|^{d+1} \\ &\leq \int_a^b |R(t)| dt + \frac{1}{(d+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| (b-a)^{d+2} \sum_{i=0}^n |\nu_i| \\ &\leq \frac{1}{(d+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| \left( \int_a^b (t-a)^{d+1} dt + (b-a)^{d+2} \sum_{i=0}^n |\nu_i| \right) \\ &\leq \frac{1}{(d+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| \left( \frac{1}{d+2} + \sum_{i=0}^n |\nu_i| \right) (b-a)^{d+2}, \end{aligned}$$

ce qui est précisément ce que l'on cherchait à démontrer. On a finalement montré, si on veut synthétiser un peu, le résultat suivant :

**Corollaire 1.** Étant donné un intervalle  $[a, b]$  et  $n + 1$  réels deux à deux distincts de  $[a, b]$  notés  $x_0, \dots, x_n$  et la méthode d'intégration numérique  $J$  associée. Si la méthode  $J$  est de degré d'exactitude  $d \geq n$ , alors il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $n$ ,  $d$  et des  $\nu_i$  (et donc en particulier pas de la longueur  $b - a$ ) telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b]), \quad |E(f)| \leq C(b - a)^{d+2} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

On voit donc bien que la longueur de l'intervalle  $[a, b]$  joue un rôle primordial dans cette estimation. Ceci va donc nous inciter fortement à préférer utiliser ces méthodes sur des intervalles de petite taille. On va donc, plutôt que d'augmenter le nombre de points ou le degré d'exactitude de la méthode, chercher à réduire la taille des intervalles en découpant l'intervalle  $[a, b]$  en petits intervalles de longueur  $h$ , sur lesquels on va utiliser une méthode à peu de points (par exemple, les méthodes de rectangle, ou de trapèze, ou de Simpson). C'est ce que l'on appelle les *méthodes composites*.

## 2.3 Construction des méthodes composites, Erreurs

Le principe de la construction des méthodes composites est simple : on découpe l'intervalle  $[a, b]$  sur lequel on veut intégrer une fonction  $f$  en petits intervalles (par exemple de longueur fixée  $h$ ). Sur chacun de ces petits intervalles de la forme  $[a + kh, a + (k + 1)h]$ , on applique une méthode d'intégration simple (à peu de points), par exemple la méthode des rectangles à gauche. On obtient ce que vous connaissez déjà et qui permet d'approcher l'intégrale (c'est la formule de Riemann si on y réfléchit bien).

### 2.3.1 Principe de construction des méthodes composites

#### Construction de la méthode des rectangles à gauche composite :

Commençons donc par expliquer la construction de la méthode des rectangles à gauche composites pour clarifier. On passera au cas général après. Même si l'écriture est un peu lourde, l'idée de base est très simple.

On se donne un entier naturel  $N > 0$ , (grand, c'est le nombre d'intervalles) et on définit la subdivision uniforme  $(a_k)_{k=0 \dots N}$  de l'intervalle  $[a, b]$ , c'est-à-dire que

$$\forall k = 0 \dots N, \quad a_k = a + kh, \quad \text{avec } h = \frac{b - a}{N}.$$

**Remarque :**  $h$  et  $N$  sont liés : plus  $N$  est grand, plus  $h$  est petit ( $N$  est le nombre d'intervalles,  $h$  leur longueur).

On approche alors l'intégrale de  $f$  sur chaque intervalle  $[a_k, a_{k+1}]$  par une méthode de rectangle à gauche :

$$\forall k = 0 \dots N \quad \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \approx hf(a_k).$$

Enfin, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(a_k).$$

C'est cette formule

$$J_{com}^{rg}(f) = h \sum_{k=0}^{N-1} f(a_k)$$

que l'on appelle méthode des rectangles à gauche composite.

**Construction des méthodes composites générales :**

Vous l'avez compris, la première chose à faire est de choisir la méthode élémentaire sur laquelle on va baser notre méthode composite (par exemple, la méthode des rectangles à gauche, à droite, du point milieu, des trapèzes, de Simpson, mais ça peut être n'importe quelle méthode). On l'écrit dans le cas général sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \quad J_{0,1}(f) = \sum_{i=0}^p \nu_i f(\theta_i).$$

On peut alors, comme on l'a vu à la section **2.1.2** transporter cette méthode (sans changer son nombre de points  $n + 1$  ni son degré d'exactitude  $d$ ) sur n'importe quel intervalle  $[\alpha, \beta]$  avec la formule :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta]), \quad J_{\alpha,\beta}(f) = (\beta - \alpha) \sum_{i=0}^n \nu_i f(\alpha + (\beta - \alpha)\theta_i).$$

On peut maintenant travailler sur  $[a, b]$  : on se donne un entier  $N$  (le nombre d'intervalles de la subdivision) et une subdivision  $(a_k)_{k=0,\dots,N}$  uniforme de  $[a, b]$  en  $N$  intervalles de longueur  $h = \frac{b-a}{N}$ . Étant donnée une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , on peut alors, grâce à la formule de Chasles écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx. \tag{15}$$

Finalement, on applique la méthode  $J_{a_k, a_{k+1}}$  pour approcher chaque  $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$  dans cette formule :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \approx J_{a_k, a_{k+1}}(f) = h \sum_{i=0}^n \nu_i f(a_k + h\theta_i). \tag{16}$$

Reste à assembler (15) et (16) pour obtenir la méthode composite :

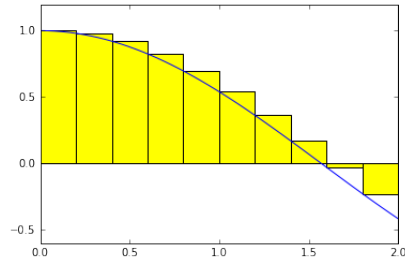
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} h \sum_{i=0}^n \nu_i f(a_k + h\theta_i) := J_{comp}(f) \tag{17}$$

### 2.3.2 Quelques exemples classiques de méthodes composites

On peut à présent reprendre les méthodes élémentaires classiques que l'on a introduites plus haut, et écrire leur version "composite". On se donne pour cela un intervalle  $[a, b]$ , une subdivision uniforme de  $[a, b]$  en  $N$  intervalles de longueur  $h$  (on a alors  $a_k = a + kh$ ) et une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

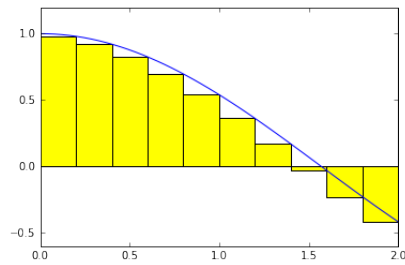
**Méthode des rectangles à gauche composite :**

$$J_{comp}^{rg}(f) = h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + kh)$$



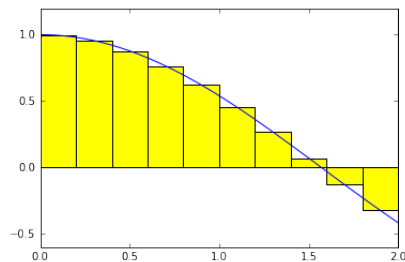
**Méthode des rectangles à droite composite**

$$J_{comp}^{rd}(f) = h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + (k+1)h) = h \sum_{k=1}^N f(a + kh)$$



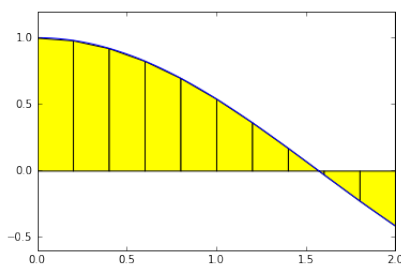
**Méthode du point milieu composite**

$$J_{comp}^{pm}(f) = h \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right)$$





## Méthode des trapèzes composite



$$J_{comp}^{trap}(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (f(a + kh) + f(a + (k+1)h)) \quad \left( = \frac{1}{2} (J_{comp}^{rg}(f) + J_{comp}^{rd}(f)) \right)$$

**N.B :** La méthode des trapèzes peut s'écrire plus simplement en utilisant le changement d'indices comme pour la méthode de rectangles à droite :

$$J_{comp}^{trap}(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kh).$$

## Méthode de Simpson composite

$$J_{comp}^{simp}(f) = \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{N-1} \left( f(a + kh) + 4f\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right) + f(a + (k+1)h) \right)$$

### 2.3.3 Estimation d'erreur des méthodes composites

En utilisant le résultat amélioré sur l'erreur des méthodes élémentaires, on peut aboutir au théorème suivant pour l'erreur des méthodes composites :

**Théorème 7.** Considérons un intervalle  $[a, b]$ , sa subdivision uniforme en  $N$  intervalles  $[a_k, a_{k+1}]$  et une méthode d'intégration numérique élémentaire sur  $[0, 1]$  de degré d'exactitude  $d$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  tel que la méthode composite associée  $J_{comp}$  satisfait, pour tout  $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$  :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - J_{comp}(f) \right| \leq C(b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f^{(d+1)}(t)| h^{d+1}$$

où  $C$  est ne dépend que de la méthode d'intégration numérique élémentaire, pas de  $h$  ni de  $N$ .

**Remarque 10.** En particulier, ce théorème montre que la valeur  $J_{comp}(f)$  converge vers l'intégrale de  $f$  lorsque le pas de la discrétisation tend vers 0 comme  $h^{d+1}$ , où  $d$  est le degré d'exactitude de la méthode élémentaire choisie. Ainsi, plus le degré d'exactitude de la méthode choisie est grand, plus rapide est la convergence de la méthode.

**Preuve :** On découpe, grâce à la relation de Chasles, l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  en intégrales sur les intervalles  $[a_k, a_{k+1}]$  et on reprend la définition de la méthode composite :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - J_{comp}(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{N-1} J_{[a_k, a_{k+1}]}(f) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - J_{[a_k, a_{k+1}]}(f) \right|. \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle  $[a_k, a_{k+1}]$ , on applique l'estimation obtenue au Théorème 6 :

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - J_{[a_k, a_{k+1}]}(f) \right| \leq \left( \frac{1}{d+2} + \sum_{i=0}^n |\nu_i| \right) \frac{h^{d+2}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} |f^{(d+1)}(t)|$$

où  $n$  et les  $(\nu_i)_{i=0 \dots n}$  sont des paramètres qui ne dépendent que de la méthode élémentaire utilisée. On pose alors  $C = \left( \frac{1}{d+2} + \sum_{i=0}^n |\nu_i| \right) \frac{1}{(n+1)!}$  et on utilise le fait que

$$\forall k = 0 \dots N-1, \quad \sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} |f^{(d+1)}(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

On a alors :

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - J_{[a_k, a_{k+1}]}(f) \right| \leq Ch^{d+2} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

Il ne reste qu'à sommer sur  $k$  pour obtenir :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - J_{comp}(f) \right| \leq CNh^{d+2} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

On rappelle maintenant que  $Nh = b - a$ , et on obtient donc le résultat voulu.

### Quelques simulations parlantes :

On cherche ici à appliquer les méthodes composites vues dans ce chapitre sur la fonction  $\cos$  sur l'intervalle  $[0, 2]$  en faisant varier la valeur du pas de discrétisation  $h$ . On obtient les résultats donnés dans le tableau suivant :

Méthode	$h = 10^{-1}$	$h = 10^{-2}$	$h = 10^{-3}$	$h = 10^{-4}$	$h = 10^{-5}$
RectG	$7.10^{-2}$	$7.10^{-3}$	$7.10^{-4}$	$7.10^{-5}$	$7,1.10^{-6}$
RectD	$7,1.10^{-2}$	$7,09.10^{-3}$	$7,08.10^{-4}$	$7,08.10^{-5}$	$7,1.10^{-6}$
Point Milieu	$3,8.10^{-4}$	$3,8.10^{-6}$	$3,8.10^{-8}$	$3,8.10^{-10}$	$3,8.10^{-12}$
Trapèze	$7,6.10^{-4}$	$7,6.10^{-6}$	$7,6.10^{-8}$	$7,6.10^{-10}$	$7,6.10^{-12}$
Simpson	$3,1.10^{-8}$	$3,1.10^{-12}$	$2,2.10^{-15}$	$1,4.10^{-15}$	$1,35.10^{-14}$

Ce tableau montre bien les précisions auxquelles on s'attendait, sauf dans le cas de la méthode de Simpson puisqu'on atteint la précision machine.