Université Toulouse 3 **Année 2017-2018**

Licence 3 ESR - Analyse Numérique

Rappels Algèbre Linéaire - Fiche 1

Dans cette fiche, on considère deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels E et F de dimensions finies respectives p et q, ainsi qu'une application linéaire $f : E \to F$. On les munit respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

On rappelle que l'on appelle *base canonique* de $\mathbb{R}^n$ la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Matrice d'une application linéaire, Noyau, Image, Rang

Matrice de $f : E \to F$ dans les bases $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_p\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots c_q\}$:
La j-ème colonne de A ($j = 1 \cdots p$) représente les coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que si $A = (a_{ij})_{i=1..q,j=1..p}$, alors $f(b_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} c_i$.

Noyau de f : ensemble des vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_p) \in E$ tels que $f(x) = 0$.

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in E,\ f(x) = 0\}$$

Image de f : ensemble des $f(x)$ lorsque x décrit E.

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

Proposition : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(b_1), \cdots, f(b_p))$ pour toute base $\{b_1, \cdots, b_p\}$ de E.

Rang de f : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

Proposition : Si $f : E \to F$, alors $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$

Proposition : $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ est de rang r si et seulement si il existe $P, Q \in GL_p(\mathbb{C})$ tels que

$$A = QJ_rP^{-1} \quad \text{où} \quad J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 1.

Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$

1. Quelle est la matrice représentative de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$?

2. Montrer que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et en donner une base $\{u_1, u_2\}$.

4. Vérifier que $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$?

Exercice 2.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, tels que $y^\top Ax \neq 0$. On considère la matrice

$$B = A - \frac{1}{y^\top Ax} Axy^\top A.$$

Montrer que

1. $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(B) \ + \ \mathbb{R} \ Ax$,
2. $\mathrm{rg}\,(A) - 1 \leq \mathrm{rg}\,(B) \leq \mathrm{rg}\,(A)$,
3. $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$ et $x \in \mathrm{Ker}(B), x \notin \mathrm{Ker}(A)$.

En déduire que $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(A) - 1$.

Calcul matriciel, matrices élémentaires

Calcul de AB : Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors

$$AB = (c_{ij}) \text{ avec } \forall i, j = 1 \cdots n,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Matrices élémentaires : pour $1 \leq k, l \leq n$ fixés,

$$E_{kl} = (e_{ij}) \text{ avec } \forall i, j = 1 \cdots n,\ e_{ij} = 1 \text{ si } i = k \text{ et } j = l, \quad 0 \text{ sinon }.$$

Proposition : La famille $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ forme une base de $\mathbb{C}^{n\times n}$, et, si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$

Exercice 3.

Une matrice à coefficients réels A est dite *stochastique* si et seulement si

$$\begin{cases} (i) & \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1 \\ (ii) & \forall 1 \leq j \leq n, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \end{cases}$$

On note par ailleurs $a_i = \min\limits_{1\leq j\leq n} a_{ij}$ et $A_i = \max\limits_{1\leq j\leq n} a_{ij}$.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

2. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est stochastique et $B = A^2$, alors $\forall 1 \leq i, j \leq n,\ a_i \leq b_{ij} \leq A_i$.

Exercice 4.

Soient A et $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que : $\forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad AXB = 0$. Montrer que A ou B est nulle.

Changement de bases, matrices semblables

Changement de bases
On munit E des bases $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_p\}$ et $\mathcal{B}' = \{b'_1, \cdots, b'_p\}$ et F des bases $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_q\}$ et $\mathcal{C}' = \{c'_1, \cdots, c'_q\}$.
On notera $A \in \mathbb{C}^{q\times p}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et $A' \in \mathbb{C}^{q\times p}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** (resp. de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$) la matrice P (resp. Q) dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. des vecteurs de $\mathcal{C}'$ dans la base $\mathcal{C}$).
On a alors la **relation de changement de base** : $A' = Q^{-1}AP$.
Si f est un **endomorphisme** ($E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$), elle devient : $A' = P^{-1}AP$.

Matrices semblables
On dit de deux matrices A et $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qu'elles sont **semblables** si et seulement si il existe un changement de base qui permet de passer de A à B :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad B = P^{-1}AP$$

c'est à dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Exercice 5.

On reprend l'**Exercice 1.** :

1. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice de passage P de la bases canonique de $\mathbb{R}^4$ à $\mathcal{E}$.

3. Écrire la matrice de passage Q de la bases canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

4. En déduire la matrice B de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$. Vérifiez que l'on retrouve la matrice calculée à la question **d.**

Trace, Déterminant d'une matrice

Trace d'une matrice : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$.

Proposition : Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A, alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Déterminant d'une matrice : Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{C}$ est une forme multilinéaire alternée des colonnes de A.

Méthode de calcul :

1. Par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour se ramener à un déterminant triangulaire
2. Par développement selon une ligne ou une colonne avec la formule de développement : par exemple, en développant selon la colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où A_{ij} désigne la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j.

Proposition : Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Exercice 6.

Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. En déduire que **deux matrices semblables ont même trace**.

Exercice 7.

Calculer les déterminants suivants :

$$(i)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (ii)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & \cdots & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

Inversibilité, calcul d'inverses

Condition Nécessaire et Suffisante d'inversibilité :

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ est inversible } \begin{array}{l} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \\ \Leftrightarrow (AX = 0 \Rightarrow X = 0) \\ \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \text{n'est pas valeur propre de } A \\ \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n. \end{array}$$

Méthodes de calcul d'inverse :

1. Formule de la "transposée de la comatrice" :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^\top \ \text{ où } (Com(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

   avec A_{ij} la matrice A à laquelle on a retiré la i-ème ligne et la j-ème colonne.
2. Résolution d'un système linéaire (par pivot de Gauss par exemple)

Exercice 8.

On dit d'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq ij\leq n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qu'elle est **à diagonale strictement dominante** si

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible.

Calculs par bloc

Considérons M et N deux matrices définies par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

où

1. A et C ont r colonnes, E et F r lignes
2. B et D ont $n - r$ colonnes, G et H $n - r$ lignes.

Alors :

$$MN = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Attention à l'ordre des termes ! ! ! Les matrices ne commutent pas...

Exercice 9.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

1. Montrer par récurrence sur m (ou n) que $\det(M) = \det(A)\det(D)$.
2. On suppose que A et D sont inversibles. Montrer alors que M est inversible et calculer son inverse à l'aide de A, B et D.

Exercice 10.

Soient A et $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \det(A - B)\ \det(A + B).$$

Exercice 11.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, D \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathcal{C}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

1. On suppose que A est inversible. Démontrer l'égalité

   $$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

   En déduire que $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Montrer que si de plus $n = m$ et $AC = CA$, alors $\det(M) = \det(AD - CB)$.
2. On suppose que D est inversible. Démontrer de même l'égalité

   $$M = \begin{pmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}.$$

   En déduire que $\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$. Montrer que si de plus $n = m$ et $BD = DB$, alors $\det(M) = \det(DA - BC)$.
3. On suppose que A et $D - CA^{-1}B$ sont inversibles. À l'aide de 1., donner une expression de M^{-1} utilisant A^{-1} et $(D - CA^{-1}B)^{-1}$.

4. Reprendre la question précédente en utilisant 2. et en supposant que D et $A - BD^{-1}C$ sont inversibles.
5. On considère $D = I_m$. Sous l'hypothèse que A et $I_m - CA^{-1}B$ sont inversibles, montrer que $A - BC$ est inversible et que

$$(A - BC)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(I_m - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

   Application : Soient x et y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$. On suppose que A est inversible. Donner une condition pour que $A + x^\top y$ soit inversible et exprimer $(A + x^\top y)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.